El CENTRO de EDUCACIÓN en
MATEMÁTICAS y COMPUTACIÓN

Problema de la Semana
Problemas y Soluciones
2021 - 2022

Problema D (Grado 9/10)

Temas

(Has clic en el nombre del tema para saltar a esa sección.)

Los problemas de este folleto están organizados de acuerdo a los temas del currículo. Un problema puede aparecer en varios temas.

Sentido Numérico (N)

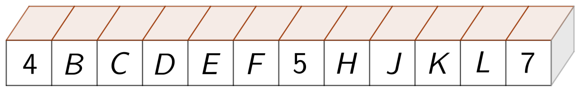
VOLVER
A LA
PORTADA

Problema de la Semana

Problema D

Números Bloqueados

Doce bloques están acomodados como se muestra en la figura.



La letra que se muestra enfrente de cada bloque representa un número. La suma de los números en cualesquiera cuatro bloques consecutivos es 25. Determina el valor de $B + F + K$.

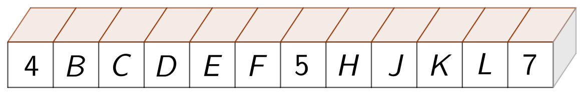
Problema de la Semana

Problema D y Solución

Números Bloqueados

Problema

Doce bloques están acomodados como se muestra en la figura.



La letra que se muestra enfrente de cada bloque representa un número. La suma de los números en cualesquiera cuatro bloques consecutivos es 25. Determina el valor de $B + F + K$.

Solución

Como la suma de los números en cualesquiera cuatro bloques consecutivos es la misma, si nos fijamos en los primeros cinco bloques, tenemos que

$$4 + B + C + D = B + C + D + E$$

Si restamos B, C y D de ambos lados obtenemos $E = 4$. De manera similar, si nos fijamos en los bloques del quinto al noveno, obtenemos que $J = 4$.

De nuevo, como la suma de los números en cualesquiera cuatro bloques consecutivos es la misma, si nos fijamos en los bloques del tercero al séptimo, tenemos que

$$C + D + E + F = D + E + F + 5$$

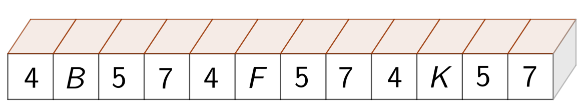
Si restamos D, E, y F de ambos lados obtenemos $C = 5$. De manera similar, si nos fijamos en los bloques del séptimo al décimo primero, obtenemos que $L = 5$.

Una vez más, como la suma de los números en cualesquiera cuatro bloques consecutivos es la misma, si nos fijamos en los bloques del octavo al décimo segundo, tenemos que

$$H + J + K + L = J + K + L + 7$$

Si restamos J, K y L de ambos lados obtenemos $H = 7$. De manera similar, si nos fijamos en los bloques del cuarto al octavo, obtenemos que $D = 7$.

Con esa información, ahora sabemos que los bloques se ven así:



A partir de ahora presentaremos dos soluciones.

Solución 1:
Como la suma de cualesquiera cuatro números consecutivos es 25, usando los primeros 4 bloques vemos que

$$\begin{aligned} 4 + B + 5 + 7 &= 25 \\ B + 16 &= 25 \\ B &= 9 \end{aligned}$$

Análogamente, podemos obtener $F = 9$ y $K = 9$.

Por lo tanto, $B + F + K = 27$.

Solución 2:

Observamos que los doce bloques se pueden separar en tres grupos de cuatro bloques consecutivos. Cada uno de estos grupos suma 25, entonces las suma total de los bloques es $3 \times 25 = 75$.

Por otro lado, la suma total es

$$4 + B + 5 + 7 + 4 + F + 5 + 7 + 4 + K + 5 + 7 = 48 + B + F + K$$

Esto significa que

$$48 + B + F + K = 75$$

y si restamos 48 obtenemos

$$B + F + K = 27.$$

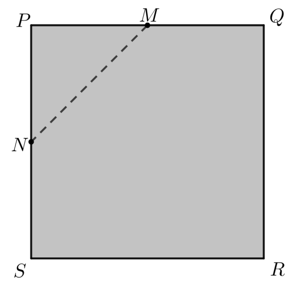
Por lo tanto, $B + F + K = 27$.

Problema de la Semana

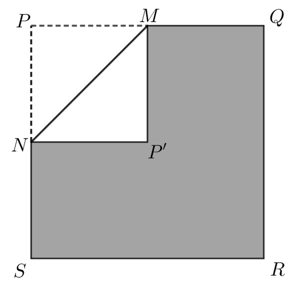
Problema D

De Cuadrado a Hexágono

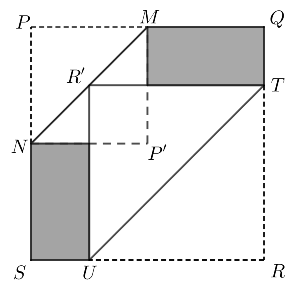
Un pedazo de papel cuadrado, $PQRS$, tiene lados de longitud 40 cm. El papel es gris de un lado y blanco del otro lado. Sea M el punto medio de del lado PQ y sea N el punto medio del lado PS.



Doblamos el papel en la línea MN de forma que la esquina P toca de nuevo al papel en el punto P'.



El punto T está sobre QR y el punto U está sobre SR de forma que TU es paralelo a MN, y cuando se dobla el papel en la línea TU, la esquina R toca de nuevo al papel en el punto R' que está sobre MN.



¿Cuál es el área del hexágono $NMQTUS$?

Las siguientes propiedades de las diagonales de un cuadrado te pueden ser útiles:

- las diagonales tienen el mismo tamaño;
- las diagonales son perpendiculares y se cortan a la mitad; y
- las diagonles dividen a la mitad los ángulos de las esquinas.

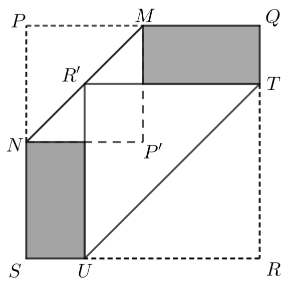
Problema de la Semana

Problema D y Solución

De Cuadrado a Hexágono

Problema

Un pedazo de papel cuadrado, $PQRS$, tiene lados de longitud 40 cm. El papel es gris de un lado y blanco del otro lado. Sea M el punto medio de del lado PQ y sea N el punto medio del lado PS. Doblamos el papel en la línea MN de forma que la esquina P toca de nuevo al papel en el punto P'. El punto T está sobre QR y el punto U está sobre SR de forma que TU es paralelo a MN, y cuando se dobla el papel en la línea TU, la esquina R toca de nuevo al papel en el punto R' que está sobre MN.



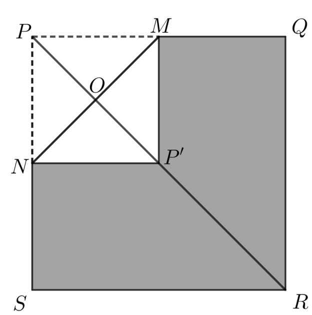
¿Cuál es el área del hexágono $NMQTUS$?

Solución

Para determinar el área del hexágono $NMQTUS$, tomaremos el área del cuadrado $PQRS$ y le restaremos las áreas de $\triangle PMN$ y de $\triangle TRU$.

Como M y N son puntos medios de PQ y PS, respectivamente, sabemos que $PM = \frac{1}{2}(PQ) = 20$ cm y $PN = \frac{1}{2}(PS) = 20$ cm. Por lo tanto, $PM = PN = 20$ y $\triangle PMN$ es un triángulo rectángulo isósceles. Entonces $\angle PNM = \angle PMN = 45°$.

Después del primer doblez, P toca al papel en P'. $\triangle P'MN$ es una reflexión de $\triangle PMN$ a través de la línea MN. Entonces $\angle P'MN = \angle PMN = 45°$ y $\angle P'NM = \angle PNM = 45°$. Por lo tanto, $\angle PMP' = \angle PNP' = 90°$. Como los cuatro lados de $PMP'N$ tienen la misma longitud, y las cuatro esquinas miden 90°, $PMP'N$ es un cuadrado.



Como $\angle MPP' = \angle MPR = 45°$, la diagonal PP' del cuadrado $PMP'N$ está sobre la diagonal PR del cuadrado $PQRS$. Sea O la intersección de las dos diagonales del cuadrado $PMP'N$. También es la intersección de MN y PR. (Luedo demostraremos que de hecho es el punto R', el punto donde hace contacto R después del segundo doblez.)

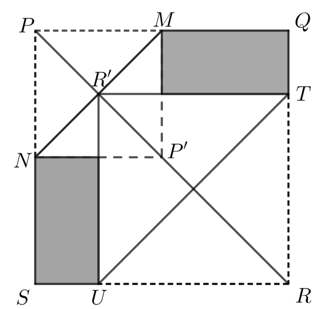
La longitud de la diagonal de $PMP'N$ se puede obtener con el Teorema de Pitágoras.

$$PP' = \sqrt{(PM)^2 + (MP')^2} = \sqrt{20^2 + 20^2} = \sqrt{800} = \sqrt{400}\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$$

Entonces, $PO = \frac{1}{2}(PP') = \frac{1}{2}(20\sqrt{2}) = 10\sqrt{2}$ cm.

En los últimos dos pasos para calcular PP' simplificamos el radical, haremos esto varias veces durante la solución. A continuación mostramos el proceso para simplificar radicales, para aquellos que no estén familiarizados:

- Encuentra el mayor cuadrado perfecto que divide al radicando (el número dentro de la raíz). En este caso, 400 es el mayor cuadrado perfecto que divide a 800.
- Reescribe el radicando como el producto del cuadrado perfecto y el factor restante. En este caso, obtenemos $\sqrt{400 \times 2}$.
- Obtén la raíz cuadrada del cuadrado perfecto. En este caso, obtenemos $20\sqrt{2}$.



Como TU es paralela a MN, tenemos que $\angle RTU = \angle RUT = 45°$ y $\triangle TRU$ es un triángulo rectángulo isósceles con $TR = RU$. Como $\triangle TRU$ se refleja en el segmento TU y R' es la imagen de R, obtenemos otro cuadrado, $TRUR'$. No daremos los detalles porque el argumento es muy similar a lo que hicimos con $PMP'N$. Como $\angle TRR' = \angle TRP = 45°$, RR' está sobre la diagonal PR. Además, R' está sobre MN. Esto significa que R' y O son el mismo punto y entonces $PR' = PO = 10\sqrt{2}$ cm.

Para calcular la longitud de la diagonal de $PQRS$ podemos usar el Teorema de Pitágoras.

$$PR = \sqrt{(PQ)^2 + (QR)^2} = \sqrt{40^2 + 40^2} = \sqrt{3200} = \sqrt{1600}\sqrt{2} = 40\sqrt{2}$$

La longitud de RR' es igual a la longitud de PR menos la longitud de PR'.

$$RR' = PR - PR' = 40\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$$

Pero $RR' = TU$, entonces $TU = 30\sqrt{2}$ cm. Sea $TR = RU = x$. Entonces, usando el Teorema de Pitágoras en $\triangle TRU$,

$$\begin{aligned}
(TR)^2 + (RU)^2 &= (TU)^2 \\
x^2 + x^2 &= (30\sqrt{2})^2 \\
x^2 + x^2 &= 900 \times 2 \\
2x^2 &= 1800 \\
x^2 &= 900
\end{aligned}$$

Como $x > 0$, obtenemos que $x = 30$ cm. Ahora tenemos suficiente información para calcular el área del hexágono $NMQTUS$.

$$\begin{aligned}
\text{Área } NMQTUS &= \text{Área } PQRS - \text{Área } \triangle PMN - \text{Área } \triangle TRU \\
&= PQ \times QR - \frac{PM \times PN}{2} - \frac{TR \times RU}{2} \\
&= 40 \times 40 - \frac{20 \times 20}{2} - \frac{30 \times 30}{2} \\
&= 1600 - \frac{400}{2} - \frac{900}{2} \\
&= 1600 - 200 - 450 \\
&= 950
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el área del hexágono $NMBPQD$ es 950 cm^2.

Problema de la Semana

Problema D

Baraja De Cien 2

La Baraja de Cien es una baraja que consiste de 100 cartas numeradas del 1 al 100. Cada carta tiene el mismo número impreso en ambos lados. Un lado de la carta es roja y el otro es amarillo.

Sarai pone todas las cartas en una mesa con el lado rojo hacia arriba. Primero, Sarai voltea todas las cartas que tienen un número múltiplo de 2. Luego, voltea todas las cartas que tienen un número múltiplo de 3. Por último, voltea todas las cartas que tienen un número múltiplo de 5.

Cuando Sarai termina, ¿Cuántas cartas tienen su lado rojo hacia arriba?

2

Problema de la Semana

Problema D y Solución

Baraja De Cien 2

Problema

La Baraja de Cien es una baraja que consiste de 100 cartas numeradas del 1 al 100. Cada carta tiene el mismo número impreso en ambos lados. Un lado de la carta es roja y el otro es amarillo.

Sarai pone todas las cartas en una mesa con el lado rojo hacia arriba. Primero, Sarai voltea todas las cartas que tienen un número múltiplo de 2. Luego, voltea todas las cartas que tienen un número múltiplo de 3. Por último, voltea todas las cartas que tienen un número múltiplo de 5.

Cuando Sarai termina, ¿Cuántas cartas tienen su lado rojo hacia arriba?

Solución

Después de voltear todas las cartas con múltiplos de 2, hay 50 cartas con su lado rojo hacia arriba y 50 cartas con su lado amarillo hacia arriba. Las cartas con el lado rojo hacia arriba son impares, mientras que las cartas con el lado amarillo hacia arriba son las pares.

Luego, en la segunda ronda, Sarai voltea las cartas con múltiplos de 3. Veamos cuántas cartas con su lado rojo hacia arriba serán volteadas a amarillo y cuántas cartas con su lado amarillo hacia arriba serán volteadas a rojo.

Hay 33 múltiplos de 3 entre 1 y 100. Estos son,

$$3, 6, 9, 12, 15, \dots, 87, 90, 93, 96, 99$$

De estos números, 17 son impares y 16 son pares. Los 17 múltiplos impares de 3 tienen su lado rojo hacia arriba, y entonces se voltean a amarillo. Los 16 múltiplos pares de 3 tienen su lado amarillo hacia arriba, y entonces se voltean a rojo (otra vez).

Entonces, después de la primera ronda habían 50 cartas con su lado rojo hacia arriba y 50 cartas con su lado amarillo hacia arriba. De las 50 rojas, 17 se cambian a amarillo. De las 50 amarillas, 16 se cambian a rojo. Por lo tanto, después de la segunda ronda, $50 - 17 + 16 = 49$ cartas tienen su lado rojo hacia arriba y 51 cartas tienen su lado amarillo hacia arriba. Las cartas con el lado rojo hacia arriba son las cartas con números que son impares y no múltiplos de 3, o que son pares y múltiplos de 3. Las cartas con el lado amarillo hacia arriba son las cartas con números que son impares y múltiplos de 3, o que son pares y no son múltiplos de 3.

En la tercera ronda, Sarai voltea las cartas con múltiplos de 5. Es decir, voltea las cartas

$$5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100$$

Para determinar el color en el que quedan estas 20 cartas después de voltearse, consideramos cuatro casos.

- Caso 1: El número es par y no es múltiplo de 3.
  Hay 7 cartas que tienen un número que es múltiplo de 5, impar y no es múltiplo de 3. Estas cartas son

  $$5, 25, 35, 55, 65, 85, 95$$

  Antes de voltearlas, estas 7 cartas tenían el lado rojo hacia arriba y entonces se voltean a amarillo.

- Caso 2: El número es par y múltiplo de 3.
  Hay 3 cartas que tienen un número que es múltiplo de 5, par y múltiplo de 3. Estas cartas son

  $$30, 60, 90$$

  Antes de voltearlas, estas 3 cartas tenían el lado rojo hacia arriba y entonces se voltean a amarillo.

- Caso 3: El número es impar y múltiplo de 3.
  Hay 3 cartas que tienen un número que es múltiplo de 5, impar y múltiplo de 3. Estas cartas son

  $$15, 45, 75$$

  Antes de voltearlas, estas 3 cartas tenían el lado amarillo hacia arriba y entonces se voltean a rojo.

- Caso 4: El número es impar y no es múltiplo de 3.
  Hay 7 cartas que tienen un número que es múltiplo de 5, impar y no es múltiplo de 3. Estas cartas son

  $$10, 20, 40, 50, 70, 80, 100$$

  Antes de voltearlas, estas 7 cartas tenían el lado amarillo hacia arriba y entonces se voltean a rojo.

Por lo tanto, cuando Sarai termina, hay $49 - 7 - 3 + 3 + 7 = 49$ cartas que tienen su lado rojo hacia arriba.

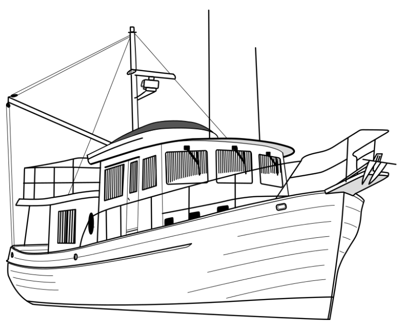
Problema de la Semana

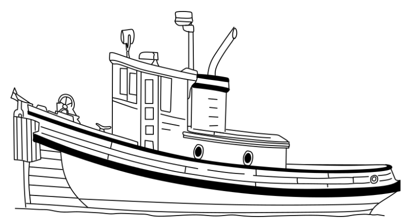
Problema D

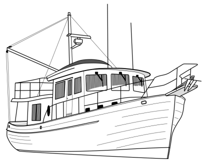
Botes En Venta

Harold, un gerente de marina, compró dos botes. Luego vendió los botes, el primero con una ganancia de 40% y el segundo con una ganancia de 60%. La ganancia total de la venta de los dos botes fue 54% y el precio total de la venta de ambos botes fue $88 704.

¿Cuánto pagó Harold originalmente por cada uno de los botes?



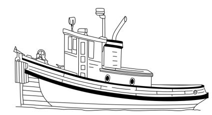




Problema de la Semana

Problema D y Solución

Botes En Venta



Problema

Harold, un gerente de marina, compró dos botes. Luego vendió los botes, el primero con una ganancia de 40% y el segundo con una ganancia de 60%. La ganancia total de la venta de los dos botes fue 54% y el precio total de la venta de ambos botes fue \$88 704. ¿Cuánto pagó Harold originalmente por cada uno de los botes?

Solución

Solución 1

Denotemos con a lo que Harold pagó por el primer bote, en dólares, y denotemos con b lo que pagó por el segundo bote, en dólares.

La ganancia de la venta del primer bote fue del 40%, es decir $0.4a$ dólares. Entonces, el primer bote se vendió en $a + 0.4a = 1.4a$ dólares. La ganancia de la venta del segundo bote fue del 60%, es decir $0.6b$ dólares. Entonces, el segundo bote se vendió en $b + 0.6b = 1.6b$ dólares. El precio total de la venta de los botes fue \$88 704, así que tenemos

$$1.4a + 1.6b = 88\,704 \tag{1}$$

Harold compró ambos botes por un total de $(a + b)$ dólares. La ganancia de la venta de ambos botes fue 54%, es decir $0.54(a + b)$ dólares. Los dos botes se vendieron en $(a + b) + 0.54(a + b) = 1.54(a + b)$ dólares. Pero el precio total de la venta fue de \$88 704, entonces

$$\begin{aligned}
1.54(a + b) &= 88\,704 \\
a + b &= 88\,704 \div 1.54 \\
a + b &= 57\,600 \\
a &= 57\,600 - b
\end{aligned}$$

Sustituyendo $a = 57\,600 - b$ en la ecuación (1) nos da

$$\begin{aligned}
1.4(57\,600 - b) + 1.6b &= 88\,704 \\
80\,640 - 1.4b + 1.6b &= 88\,704 \\
0.2b &= 8064
\end{aligned}$$

Dividiendo entre 0.2, obtenemos $b = 40\,320$. Como $b = 40\,320$ y $a + b = 57\,600$, obtenemos que $a = 17\,280$.

Por lo tanto, Harold pagó \$17 280 por el primer bote y \$40 320 por el segundo.

Solución 2

Denotemos con a lo que Harold pagó por el primer bote, en dólares, y denotemos con b lo que pagó por el segundo bote, en dólares.

La ganancia de la venta del primer bote fue 40%, es decir $0.4a$ dólares. El primer bote se vendió en $a + 0.4a = 1.4a$ dólares. La ganancia de la venta del segundo bote fue 60%, es decir $0.6b$ dólares. El segundo bote se vendió en $b + 0.6b = 1.6b$ dólares. El precio total de la venta de los botes fue \$88 704, así que tenemos

$$1.4a + 1.6b = 88\,704$$

Multiplicando por 5, obtenemos

$$7a + 8b = 443\,520 \tag{1}$$

Harold compró ambos botes por un total de $(a + b)$ dólares. La ganancia de la venta de ambos botes fue 54%, es decir $0.54(a + b)$ dólares. La ganancia total es la suma de las ganancias en la venta de cada bote, entonces

$$\begin{aligned} 0.54(a+b) &= 0.4a + 0.6b \\ 0.54a + 0.54b &= 0.4a + 0.6b \\ 0.14a &= 0.06b \end{aligned}$$

Multiplicando por 50, obtenemos

$$7a = 3b \tag{2}$$

Sustituyendo $3b$ en lugar de $7a$ en la ecuación (1), obtenemos $3b + 8b = 443\,520$, es decir $11b = 443\,520$ y entonces $b = 40\,320$.

Sustituyendo $b = 40\,320$ en la ecuación (2), obtenemos $7a = 120\,960$ y entonces $a = 17\,280$.

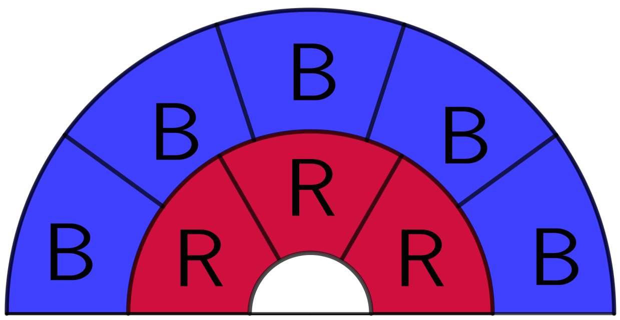
Por lo tanto, Harold pagó \$17 280 por el primer bote y \$40 320 por el segundo bote.

Problema de la Semana

Problema D

Áreas Coloreadas

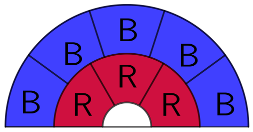
Chandra desea pintar un señalamiento. El señalamiento está compuesto por tres semicírculos concéntricos, que crean una banda externa, una banda intermedia y un semicírculo interno.



La banda externa se divide en cinco regiones con la misma área y se pintará de azul. Cada una de esas regiones lleva una B. La banda intermedia se divide en tres regiones con la misma área y se pintará de rojo. Cada una de esas regiones lleva una R. El semicírculo interno se pintará de blanco.

El diámetro del semicírculo grande es 10 m y el diámetro del semicírculo mediano es 6 m.

Si la razón del área de una región con R entre el área de una región con B es $5 : 6$, ¿cuál es el diámetro del semicírculo interno?



Problema de la Semana

Problema D y Solución

Áreas Coloreadas

Problema

Chandra desea pintar un señalamiento. El señalamiento está compuesto por tres semicírculos concéntricos, que crean una banda externa, una banda intermedia y un semicírculo interno. La banda externa se divide en cinco regiones con la misma área y se pintará de azul. Cada una de esas regiones lleva una B. La banda intermedia se divide en tres regiones con la misma área y se pintará de rojo. Cada una de esas regiones lleva una R. El semicírculo interno se pintará de blanco. El diámetro del semicírculo grande es 10 m y el diámetro del semicírculo mediano es 6 m. Si la razón del área de una región con R entre el área de una región con B es $5:6$, ¿cuál es el diámetro del semicírculo interno?

Solución

Como el área de un círculo con radio r es πr^2, el área de un semicírculo con radio r es $\frac{\pi r^2}{2}$. El semicírculo grande tiene diámetro 10 m y entonces tiene un radio de 5 m. Por lo tanto, el área del semicírculo grande es $\frac{\pi(5)^2}{2} = \frac{25\pi}{2}$ m^2. El semicírculo mediano tiene diámetro 6 m y entonces tiene un radio de 3 m. Por lo tanto, el área del semicírculo mediano es $\frac{\pi(3)^2}{2} = \frac{9\pi}{2}$ m^2.

El área del semicírculo grande está conformada por las áreas de las 5 regiones con B más el área del semicírculo mediano. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 5B + \frac{9\pi}{2} &= \frac{25\pi}{2} \\ 5B &= 8\pi \\ B &= \frac{8\pi}{5} \end{aligned}$$

Como la razón del área de una región con R entre el área de una región con B es $5:6$, tenemos que $\frac{R}{B} = \frac{5}{6}$. Entonces,

$$\begin{aligned} R &= \frac{5B}{6} \\ &= \frac{5}{6}\left(\frac{8\pi}{5}\right) \\ &= \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

Llamemos r al radio del semicírculo interno.
El área del semicírculo mediano está conformada por las áreas de las 3 regiones con R más el área del semicírculo interno. Por lo tanto,

$$\frac{9\pi}{2} = 3R + \frac{\pi r^2}{2}$$

Como $R = \frac{4\pi}{3}$, tenemos que

$$\frac{9\pi}{2} = 4\pi + \frac{\pi r^2}{2}$$

Por lo tanto, $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi r^2}{2}$ que es lo mismo que $r^2 = 1$. Como $r > 0$, entonces $r = 1$.

Por lo tanto, el diámetro del semicírculo pequeño es 2 m.

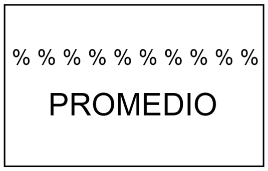
Problema de la Semana

Problema D

Otro Promedio

En seis cartas están escritos los números 2124, 1984, 1742, 2344, 2074 y 1632. Daniel toma cuatro cartas y obtiene que el promedio de los números es 2021. Determina el promedio de los números de las dos cartas restantes.

Problema extra : ¿Puedes interpretar el acertijo de la siguiente imagen?



Problema de la Semana
Problema D y Solución
Otro Promedio

Problema

En seis cartas están escritos los números 2124, 1984, 1742, 2344, 2074 y 1632. Daniel toma cuatro cartas y obtiene que el promedio de los números es 2021. Determina el promedio de los números de las dos cartas restantes.

Problema extra : ¿Puedes interpretar el acertijo de la siguiente imagen?

Solución

Primero, observemos que podríamos tantear con las cartas para determinar los cuatro números que tienen promedio 2021. En ese caso, es fácil obtener el promedio de las otras dos cartas. Este método funciona decentemente cuando tenemos una cantidad pequeña de cartas. Sin embargo, si agregamos sólo unas cuantas cartas más, entonces es mucho más complicado resolver el problema con este método. Resulta que podemos resolver el problema sin necesidad de encontrar los cuatro números que usó Daniel.

La suma de los seis números es

$$2124 + 1984 + 1742 + 2344 + 2074 + 1632 = 11\,900$$

Como el promedio de los cuatro números es 2021, entonces la suma de esos cuatro números es $4 \times 2021 = 8084$.

La suma de las otras dos cartas es $11\,900 - 8084 = 3816$. Como estamos usando dos cartas, el promedio lo obtenemos dividiendo entre 2. Entonces, el promedio de las dos cartas restantes es $3816 \div 2 = 1908$.

Aunque no era parte del problema, los dos números que suman 3816 son 1742 y 2074. Se puede verificar que el promedio de las cuatro cartas originales, 2124, 1984, 2344 y 1632, es 2021.

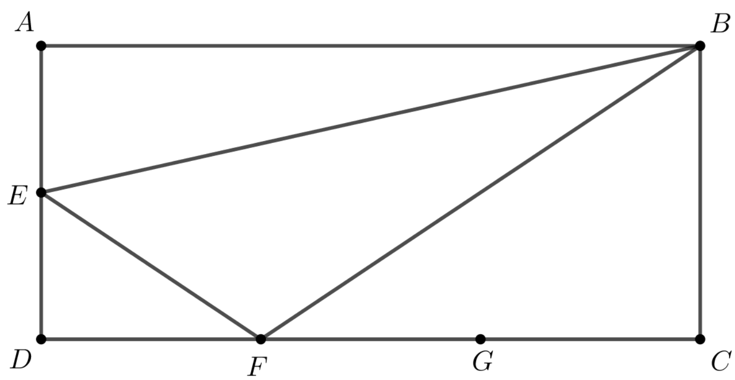
Solución al problema extra: 10 por ciento por encima del promedio.

Problema de la Semana

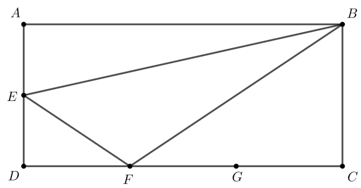
Problema D

El Rectángulo Completo

En el diagrama, $ABCD$ es un rectángulo. Los puntos F y G están sobre DC (con F más cerca de D) de tal forma que $DF = FG = GC$. Sea E el punto medio de AD.



Si el área de $\triangle BEF$ es 30 cm^2, determina el área del rectángulo $ABCD$.



Problema de la Semana

Problema D y Solución

El Rectángulo Completo

Problema

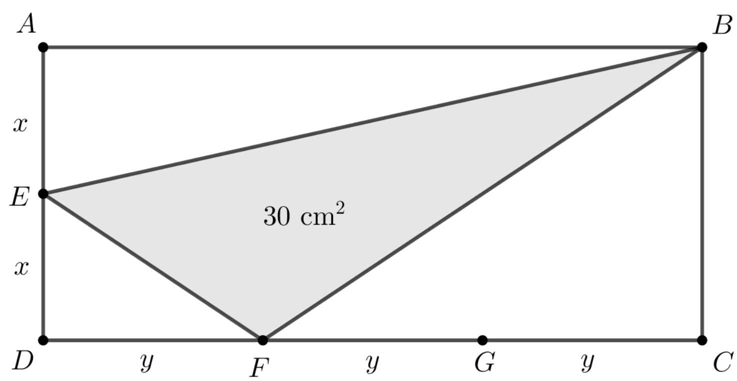
En el diagrama, $ABCD$ es un rectángulo. Los puntos F y G están sobre DC (con F más cerca de D) de tal forma que $DF = FG = GC$. Sea E el punto medio de AD.

Si el área de $\triangle BEF$ es 30 cm^2, determina el área del rectángulo $ABCD$.

Solución

Sea $DF = FG = GC = y$. Entonces tenemos que $AB = DC = 3y$ y que $FC = 2y$.

Como E es punto medio de AD, sea $AE = ED = x$. Entonces $AD = BC = 2x$.



Haremos una ecuación que conecte el área del rectángulo con las áreas de los cuatro triángulos que están dentro del rectángulo.

$$\begin{aligned}
\text{Área } ABCD &= \text{Área } \triangle ABE + \text{Área } \triangle BCF + \text{Área } \triangle FDE + \text{Área } \triangle BEF \\
AD \times DC &= \frac{AE \times AB}{2} + \frac{BC \times FC}{2} + \frac{DF \times ED}{2} + 30 \\
(2x)(3y) &= \frac{x \times 3y}{2} + \frac{2x \times 2y}{2} + \frac{y \times x}{2} + 30 \\
6xy &= \frac{3xy}{2} + 2xy + \frac{xy}{2} + 30 \\
12xy &= 3xy + 4xy + xy + 60 \\
4xy &= 60 \\
xy &= 15
\end{aligned}$$

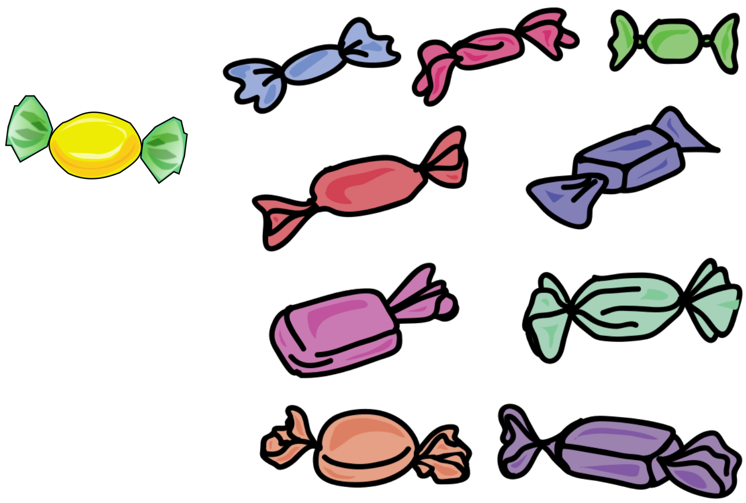
Por lo tanto, el área del rectángulo $ABCD$ es $AD \times DC = (2x)(3y) = 6xy = 6(15) = 90$ cm^2.

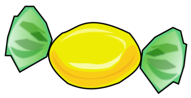
Problema de la Semana

Problema D

Compartiendo Dulces

Diana tiene 10 dulces y quiere repartir los 10 dulces entre sus tres amigas: Victoria, Manuela y Alejandra. No es necesario que todas terminen con la misma cantidad de dulces, pero sí quiere darle al menos un dulce a cada una. ¿De cuántas maneras puede Diana distribuir los dulces entre Victoria, Manuela y Alejandra?





Problema de la Semana

Problema D y Solución

Compartiendo Dulces

Problema

Diana tiene 10 dulces y quiere repartir los 10 dulces entre sus tres amigas: Victoria, Manuela y Alejandra. No es necesario que todas terminen con la misma cantidad de dulces, pero sí quiere darle al menos un dulce a cada una. ¿De cuántas maneras puede Diana distribuir los dulces entre Victoria, Manuela y Alejandra?

Solución

Sabemos que hay 10 dulces y que cada amiga debe recibir al menos un dulce. Consideraremos los siguientes casos:

1. Victoria recibe un dulce. Entonces Manuela y Alejandra reciben un total de $10 - 1 = 9$ dulces entre las dos. Esto se puede hacer de 8 maneras:
$$(1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1)$$
2. Victoria recibe dos dulces. Entonces Manuela y Alejandra reciben un total de $10 - 2 = 8$ dulces entre las dos. Esto se puede hacer de 7 maneras:
$$(1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (7, 1)$$
3. Victoria recibe tres dulces. Entonces Manuela y Alejandra reciben un total de $10 - 3 = 7$ dulces entre las dos. Esto se puede hacer de 6 maneras:
$$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$$
4. Victoria recibe cuatro dulces. Entonces Manuela y Alejandra reciben un total de $10 - 4 = 6$ dulces entre las dos. Esto se puede hacer de 5 maneras:
$$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$$
5. Victoria recibe cinco dulces. Entonces Manuela y Alejandra reciben un total de $10 - 5 = 5$ dulces entre las dos. Esto se puede hacer de 4 maneras: $(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$.
6. Victoria recibe seis dulces. Entonces Manuela y Alejandra reciben un total de $10 - 6 = 4$ dulces entre las dos. Esto se puede hacer de 3 maneras: $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$.
7. Victoria recibe siete dulces. Entonces Manuela y Alejandra reciben un total de $10 - 7 = 3$ dulces entre las dos. Esto se puede hacer de 2 maneras: $(1, 2), (2, 1)$.
8. Victoria recibe ocho dulces. Entonces Manuela y Alejandra reciben un total de $10 - 8 = 2$ dulces entre las dos. Esto se puede hacer de 1 manera: $(1, 1)$.

Observa que Victoria no puede recibir más de ocho dulces. En ese caso, una de Manuela o Alejandra no habría recibido ningún dulce.

Entonces, la cantidad total de maneras en las que Diana puede distribuir 10 dulces entre tres amigas de forma que cada una reciba al menos un dulce es $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$. Esta suma se puede obtener sumando los enteros positivos entre 1 y 8. Sin embargo, también se sabe que la suma de los primeros n enteros positivos se puede calcular usando la fórmula $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. En este caso $n = 8$, así que la suma es $\dfrac{8(9)}{2} = 36$.

Problema de la Semana

Problema D

¡Ring Ring!

La escuela POTW quiere crear un sistema telefónico de árbol para usar en caso de que la escuela deba cerrar por alguna emergencia. Usando un sistema telefónico de árbol, el director puede llamar como máximo a otros tres empleados, y cada uno de ellos como máximo a otros tres empleados, y así sucesivamente, hasta que todos los empleados hayan sido contactados.

Si la escuela POTW tiene 100 empleados (incluyendo al director) y usa un sitema telefónico de árbol en el cual cada empleado llama a 0, 1, 2 o 3 otros empleados, determina el máximo número de empleados que no necesitan hacer ninguna llamada.

Problema de la Semana

Problema D y Solución

¡Ring Ring!

Problema

La escuela POTW quiere crear un sistema telefónico de árbol para usar en caso de que la escuela deba cerrar por alguna emergencia. Usando un sistema telefónico de árbol, el director puede llamar como máximo a otros tres empleados, y cada uno de ellos como máximo a otros tres empleados, y así sucesivamente, hasta que todos los empleados hayan sido contactados.

Si la escuela POTW tiene 100 empleados (incluyendo al director) y usa un sitema telefónico de árbol en el cual cada empleado llama a 0, 1, 2 o 3 otros empleados, determina el máximo número de empleados que no necesitan hacer ninguna llamada.

Solución

Es importante observar que para minimizar el número de personas que llaman, necesitamos maximizar el número de llamadas hechas por aquellos que sí hacen llamadas.

Ya que el director hace las 3 llamadas iniciales, hay cuatro personas (el director y las otras 3) que tienen información. Falta contactar a $100 - 4 = 96$ personas.

Las siguientes 3 personas hacen 3 llamadas cada uno, para un total de 9 llamadas. Ahora hay 13 personas que tienen la información y aún falta contactar a 87 personas.

Las siguientes 9 personas hacen 3 llamadas cada uno, para un total de 27 llamadas. Ahora hay 40 personas que tienen la información y aún falta contactar a 60 personas.

A partir de aquí, presentaremos dos procedimientos para obtener cuántas personas deben contactar a las 60 personas restantes.

- **Procedimiento 1:** Si las siguientes 27 personas hacen 3 llamadas cada uno, resultando en un total de 81 llamadas, nos estaríamos pasando por $81 - 60 = 21$ llamadas. Esto significa que $21 \div 3 = 7$ de las 27 personas no necesitan hacer ninguna llamada. Por lo tanto, sólo $27 - 7 = 20$ personas más necesitan hacer llamadas.

- **Procedimiento 2:** Para contactar a las últimas 60 personas, sólo $60 \div 3 = 20$ personas más necesitan hacer llamadas porque cada persona llama a 3 personas.

Entonces, la cantidad total de personas que necesitan hacer llamadas es $1 + 3 + 9 + 20 = 33$.

Por lo tanto, $100 - 33 = 67$ es la mayor cantidad de empleados que no necesitan hacer ninguna llamada en el sistema telefónico de árbol.

Un sistema como este es bastante eficiente para distribuir información a un gran número de personas. Cerca de una tercera parte de los empleados deben hacer sólo 3 llamadas cada uno, mientras que cerca de dos terceras partes de los empleados no necesitan hacer ninguna llamada.

Problema de la Semana

Problema D

No es lo que Parece

En la siguiente tabla, las letras a, b, c, d y e representan números desconocidos.

	Columna 1	Columna 2	Columna 3
Fila 1	75	b	83
Fila 2	76	80	d
Fila 3	a	81	85
Fila 4	78	c	e

A primera vista, parece que estos números siguen un patrón bastante predecible. Sin embargo, necesitamos que las columnas y las filas satisfagan las siguientes reglas:

1. La suma de los números en cada una de las cuatro filas es la misma.
2. La suma de los números en cada una de las tres columnas es la misma.
3. La suma de cualquier fila no es la misma que la suma de cualquier columna.

Determina los valores de a, b, c, d y e.

Problema de la Semana

Problema D y Solución

No es lo que Parece

Problema

En la siguiente tabla, las letras a, b, c, d y e representan números desconocidos.

	Columna 1	Columna 2	Columna 3
Fila 1	75	b	83
Fila 2	76	80	d
Fila 3	a	81	85
Fila 4	78	c	e

A primera vista, parece que estos números siguen un patrón bastante predecible. Sin embargo, necesitamos que las columnas y las filas satisfagan las siguientes reglas:

1. La suma de los números en cada una de las cuatro filas es la misma.
2. La suma de los números en cada una de las tres columnas es la misma.
3. La suma de cualquier fila no es la misma que la suma de cualquier columna.

Determina los valores de a, b, c, d y e.

Solución

La respuesta final es $a = 23$, $b = 31$, $c = 60$, $d = 33$ y $e = 51$. A continuación explicaremos nuestra solución.

Cada una de las tres primeras filas tiene dos valores conocidos y un valor desconocido. También sabemos que la suma de cada fila es la misma.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\text{Suma de la Fila 1} &= \text{Suma de la Fila 2}\\ 75 + b + 83 &= 76 + 80 + d\\ b + 158 &= 156 + d\\ d &= b + 2\end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}\text{Suma de la Fila 1} &= \text{Suma de la Fila 3}\\ 75 + b + 83 &= a + 81 + 85\\ b + 158 &= a + 166\\ a &= b - 8\end{aligned}$$

sustituyendo a con $b-8$ y d con $b+2$, obtenemos la siguiente tabla:

	Columna 1	Columna 2	Columna 3
Fila 1	75	b	83
Fila 2	76	80	$b+2$
Fila 3	$b-8$	81	85
Fila 4	78	c	e

Ahora, cada columna tiene la misma suma. Usaremos esta propiedad para encontrar los valores de c y e.

$$\begin{aligned}\text{Suma de la Columna 1} &= \text{Suma de la Columna 2}\\ 75 + 76 + (b-8) + 78 &= b + 80 + 81 + c\\ b + 221 &= b + c + 161\\ c &= 60\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\text{Suma de la Columna 1} &= \text{Suma de la Columna 3}\\ 75 + 76 + (b-8) + 78 &= 83 + (b+2) + 85 + e\\ b + 221 &= b + e + 170\\ e &= 51\end{aligned}$$

Como sabemos que $c = 60$ y $e = 51$, podemos determinar la suma de las filas usando la cuarta fila. La suma de la fila es $78 + 60 + 51 = 189$. Podemos usar esta suma para determinar el valor de b.

De la Fila 1 sabemos que $75 + b + 83 = 189$ y obtenemos $b = 31$.

Sabemos que $d = b + 2$, así que $d = 33$. Además, sabemos que $a = b - 8$, entonces $a = 23$.

Por lo tanto, $a = 23$, $b = 31$, $c = 60$, $d = 33$ y $e = 51$. Es fácil verificar que cada fila suma 189 y cada columna suma 252.

Problema de la Semana

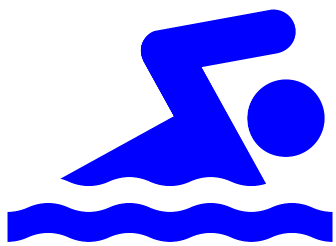
Problema D

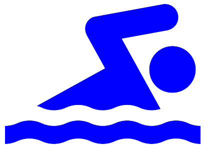
¡Vamos a Nadar!

En la familia de Wei hay cuatro niños y tres adultos. Cada fin de semana, van a nadar juntos. Para usar la piscina pública, cada persona necesita un boleto.

Los padres de Wei compran varios boletos y los guardan en una caja. Al inicio del año, la proporción de boletos para adulto a boletos para niño en la caja era de $11 : 14$.

La familia de Wei usó boletos cada fin de semana para ir a nadar hasta que ya no tuvieron boletos para todos los miembros de la familia. En ese momento, ya no quedaban boletos para niño y quedaban 3 boletos para adulto en la caja. ¿Cuántos boletos había en la caja al inicio del año?





Problema de la Semana

Problema D y Solución

¡Vamos a Nadar!

Problema

En la familia de Wei hay cuatro niños y tres adultos. Cada fin de semana, van a nadar juntos. Para usar la piscina pública, cada persona necesita un boleto.

Los padres de Wei compran varios boletos y los guardan en una caja. Al inicio del año, la proporción de boletos para adulto a boletos para niño en la caja era de $11 : 14$.

La familia de Wei usó boletos cada fin de semana para ir a nadar hasta que ya no tuvieron boletos para todos los miembros de la familia. En ese momento, ya no quedaban boletos para niño y quedaban 3 boletos para adulto en la caja. ¿Cuántos boletos había en la caja al inicio del año?

Solución

Sea n el número de veces que la familia de Wei usó boletos para ir a nadar. Como usaron 4 boletos para niño y 3 boletos para adulto en cada visita, entonces usaron $4n$ boletos para niño y $3n$ boletos para adulto en total. Después de haber usado todos los boletos para niño, quedaban 3 boletos para adulto en la caja. Esto quiere decir que había $3n + 3$ boletos para adulto y $4n$ boletos para niño al inicio de año.

La proporción de boletos para adulto a boletos para niño a principio de año era de $11 : 14$. Podemos usar esto para escribir y resolver la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned}\frac{11}{14} &= \frac{3n+3}{4n}\\ (11)(4n) &= (14)(3n+3)\\ 44n &= 42n + 42\\ 2n &= 42\\ n &= 21\end{aligned}$$

Por lo tanto, la familia de Wei usó los boletos para ir a nadar 21 veces.

La cantidad total de boletos en la caja al inicio del año era de $4n + 3n + 3 = 7n + 3$. Como $n = 21$, la cantidad total de boletos era $7(21) + 3 = 150$.

Problema de la Semana

Problema D

Cinco Dígitos

Una sucesión empieza con un 5, seguido de dos 6s, luego tres 7s, cuatro 8s, cinco 9s, seis 5s, siete 6s, ocho 7s, nueve 8s, diez 9s, once 5s, doce 6s, y así sucesivamente. (Observa que sólo se usan los cinco dígitos del 5 al 9).

Los primeros 29 términos de la sucesión son estos:

$$5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, \ldots$$

Determina el dígito en la posición 2022 de la sucesión.

Nota:
Para resolver el problema, puede ser útil usar el hecho de que la suma de los primeros n enteros positivos es igual a $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Es decir,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Por ejemplo, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, y $\dfrac{5(6)}{2} = 15$.

Además, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$, y $\dfrac{8(9)}{2} = 36$.

Problema de la Semana
Problema D y Solución
Cinco Dígitos

Problema
Una sucesión empieza con un 5, seguido de dos 6s, luego tres 7s, cuatro 8s, cinco 9s, seis 5s, siete 6s, ocho 7s, nueve 8s, diez 9s, once 5s, doce 6s, y así sucesivamente. (Observa que sólo se usan los cinco dígitos del 5 al 9).

Los primeros 29 términos de la sucesión son estos:

$$5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, \ldots$$

Determina el dígito en la posición 2022 de la sucesión.

Solución
El primer grupo en la sucesión contiene un 5. El segundo grupo en la sucesión contiene dos 6s. Al final del segundo grupo de dígitos, hay un total de $1 + 2 = 3$ dígitos. El tercer grupo en la sucesión contiene tres 7s. Al final del tercer grupo de dígitos, hay un total de $1 + 2 + 3 = 6$ dígitos. El n-ésimo grupo en la sucesión contiene n dígitos. Al final del n-ésimo grupo de dígitos, hay un total de $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ dígitos.

¿Cuántos grupos de dígitos se requieren para que haya al menos 2022 dígitos en la sucesión?

Necesitamos encontrar el valor de n tal que $1 + 2 + 3 + \cdots + n \geq 2022$ y $1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) < 2022$. Para ello, utilizaremos prueba y error. Al final de la solución, se muestra un procedimiento más algebraico para encontrar el valor de n usando la fórmula cuadrática.

Supongamos que $n = 100$. Entonces $1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \frac{100(101)}{2} = 5050 > 2022$.

Supongamos que $n = 50$. Entonces $1 + 2 + 3 + \cdots + 50 = \frac{50(51)}{2} = 1275 < 2022$.

Supongamos que $n = 60$. Entonces $1 + 2 + 3 + \cdots + 60 = \frac{60(61)}{2} = 1830 < 2022$.

Supongamos que $n = 65$. Entonces $1 + 2 + 3 + \cdots + 65 = \frac{65(66)}{2} = 2145 > 2022$.

Supongamos que $n = 63$. Entonces $1 + 2 + 3 + \cdots + 63 = \frac{63(64)}{2} = 2016 < 2022$.

El dígito en la posición 2022 es el sexto número en el siguiente grupo de dígitos. Es decir, el dígito en la posición 2022 está en el grupo de dígitos número 64.

Ahora, determinaremos qué dígito aparece en el grupo 64. Como vamos usando los dígitos de forma cíclica y sólo se usan cinco dígitos, podemos determinar el dígito examinando $\frac{64}{5} = 12\frac{4}{5}$. Entonces, en el grupo de dígitos número 64, se usa el cuarto dígito en la sucesión de dígitos. Es decir, en el grupo de dígitos número 64, se usa el dígito 8.

Como el dígito en la posición 2022 está en el grupo de dígitos número 64, entonces concluimos que el dígito en la posición 2022 es un 8.

Ahora mostraremos una forma algebraica de encontrar el valor de n.

Primero encontraremos el valor de $n, n > 0$, tal que

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)}{2} &= 2022\\ n(n+1) &= 4044\\ n^2 + n - 4044 &= 0\end{aligned}$$

Podemos usar la fórmula cuadrática para encontrar n.

$$\begin{aligned}n &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-4044)}}{2}\\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{16\,177}}{2}\end{aligned}$$

Como $n = \frac{-1-\sqrt{16\,177}}{2} < 0$, descartamos esta solución.

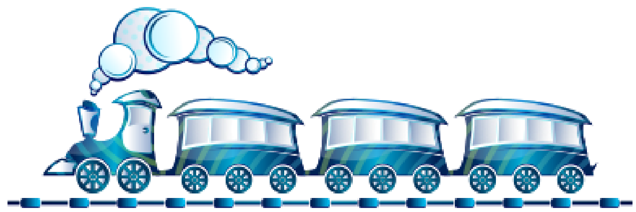
Entonces $n = \frac{-1+\sqrt{16\,177}}{2} \approx 63.09$. Pero n es un entero. Entonces, interpretando el resultado, cuando $n = 63$, obtenemos $1 + 2 + 3 + \cdots + 63 < 2022$, y cuando $n = 64$, obtenemos $1 + 2 + 3 + \cdots + 64 > 2022$. Entonces, el dígito en la posición 2022 está en el grupo de dígitos número 64.

Problema de la Semana

Problema D

Inusualmente Tarde

Cada día, un tren hace un viaje de Ciudad Alfa a Ciudad Beta. Aunque normalmente es puntual, en dos viajes distintos el tren se retrasó. En el primer viaje, el tren viajó a una velocidad promedio de 56 km/h y llegó 27 minutos tarde. En el segundo viaje, el tren viajó a una velocidad promedio de 54 km/h y llegó 42 minutos tarde. ¿Cuál es la distancia entre Ciudad Alfa y Ciudad Beta?



Problema de la Semana
Problema D y Solución
Inusualmente Tarde

Problema

Cada día, un tren hace un viaje de Ciudad Alfa a Ciudad Beta. Aunque normalmente es puntual, en dos viajes distintos el tren se retrasó. En el primer viaje, el tren viajó a una velocidad promedio de 56 km/h y llegó 27 minutos tarde. En el segundo viaje, el tren viajó a una velocidad promedio de 54 km/h y llegó 42 minutos tarde. ¿Cuál es la distancia entre Ciudad Alfa y Ciudad Beta?

Solución

Presentaremos tres soluciones distintas. En las tres soluciones usaremos la fórmula

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \times \text{tiempo}$$

o equivalentemente,

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$$

Solución 1

Denotemos por t el tiempo, en horas, que tardó el recorrido del tren cuando llegó 27 minutos tarde. Como $42 - 27 = 15$ minutos, entonces $t + \frac{15}{60} = t + \frac{1}{4}$ representa el tiempo, en horas, que tardó el recorrido del tren cuando llegó 42 minutos tarde.

Para el primer viaje, la velocidad fue 56 km/h y la duración fue t, por lo tanto la distancia recorrida fue $56t$ km.

Para el segundo viaje, la velocidad fue 54 km/h y la duración fue $t + \frac{1}{4}$, por lo tanto la distancia recorrida fue $54\left(t + \frac{1}{4}\right)$ km.

Como la distancia entre Ciudad Alfa y Ciudad Beta siempre es la misma,

$$\begin{aligned} 56t &= 54\left(t + \tfrac{1}{4}\right) \\ 56t &= 54t + \tfrac{27}{2} \\ 2t &= \tfrac{27}{2} \\ t &= \tfrac{27}{4} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la distancia entre Ciudad Alfa y Ciudad Beta es $56t = 56 \times \frac{27}{4} = 378$ km.

Solución 2

Sea d la distancia, en km, entre Ciudad Alfa y Ciudad Beta.

Para el primer viaje, la velocidad fue 56 km/h y la distancia es d, por lo tanto el tiempo de viaje fue $\frac{d}{56}$ horas.

Para el segundo viaje, la velocidad fue 54 km/h y la distancia es d, por lo tanto el tiempo de viaje fue $\frac{d}{54}$ horas.

Como la diferencia de tiempo entre el primer y segundo viaje fue de $42 - 27 = 15$ minutos, es decir $\frac{1}{4}$ de hora,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{54} - \frac{d}{56} &= \frac{1}{4} \\
\frac{56d - 54d}{(54)(56)} &= \frac{1}{4} \\
2d &= \frac{1}{4} \times (54)(56) \\
2d &= 756 \\
d &= 378
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la distancia entre Ciudad Alfa y Ciudad Beta es 378 km.

Solución 3

Esta solución es bastante distinta a las primeras dos soluciones.

En el primer viaje, si el tren hubiera primero viajado por 27 minutos, entonces habría completado el resto del viaje en el tiempo de viaje usual. Durante esos 27 minutos, el tren viajaría $56 \times \frac{27}{60} = \frac{1512}{60} = 25.2$ km.

En el segundo viaje, si el tren hubiera primero viajado por 42 minutos, entonces habría completado el resto del viaje en el tiempo de viaje usual. Durante esos 42 minutos, el tren viajaría $54 \times \frac{42}{60} = \frac{2268}{60} = 37.8$ km.

El tren más lento está $37.8 - 25.2 = 12.6$ km por delante del tren más rápido en el momento en el que les queda el tiempo usual de viaje para terminar. El tren más rápido se acerca 2 km/h al tren más lento. Por lo tanto, al tren más rápido le tomará $\frac{12.6}{2} = 6.3$ h alcanzar al tren lento y por lo tanto completar el viaje. En 6.3 h, el tren más rápido recorre $56 \times 6.3 = 352.8$ km. Pero ya había recorrido 25.2 km.

Por lo tanto, la distancia total entre Ciudad Alfa y Ciudad Beta es $25.2 + 352.8 = 378$ km.

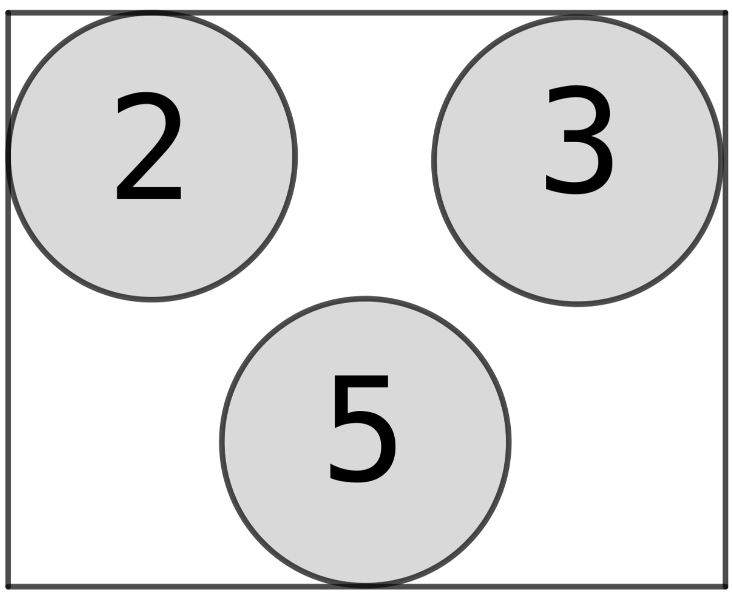
Problema de la Semana

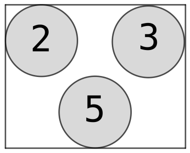
Problema D

El Juego de Dardos

En un carnaval, un juego de dardos tiene tres círculos que no se traslapan dentro de un rectángulo. Un círculo vale 2 puntos, otro vale 3 puntos, y el tercero vale 5 puntos. Puedes lanzar hasta 10 dardos, y comienzas con 0 puntos. Si el dardo cae en un círculo, obtienes los puntos maracados en el círculo. Si el dardo no cae en ingún círculo, entonces obtienes 0 puntos.

Supongamos que obtienes exactamente 30 puntos después de 10 lanzamientos. Sea a la cantidad de lanzamientos que caen en el círculo de valor 5, sea b la cantidad de lanzamientos que caen en el círculo de valor 3, y sea c la cantidad de lanzamientos que caen en el círculo de valor 2. Determina todas las posibles tripletas (a, b, c).





Problema de la Semana

Problema D y Solución

El Juego de Dardos

Problema

En un carnaval, un juego de dardos tiene tres círculos que no se traslapan dentro de un rectángulo. Un círculo vale 2 puntos, otro vale 3 puntos, y el tercero vale 5 puntos. Puedes lanzar hasta 10 dardos, y comienzas con 0 puntos. Si el dardo cae en un círculo, obtienes los puntos maracados en el círculo. Si el dardo no cae en ingún círculo, entonces obtienes 0 puntos.

Supongamos que obtienes exactamente 30 puntos después de 10 lanzamientos. Sea a la cantidad de lanzamientos que caen en el círculo de valor 5, sea b la cantidad de lanzamientos que caen en el círculo de valor 3, y sea c la cantidad de lanzamientos que caen en el círculo de valor 2. Determina todas las posibles tripletas (a, b, c).

Solución

Debemos determinar las posibles tripletas (a, b, c) tales que $5a + 3b + 2c = 30$ y $a + b + c \leq 10$.

Empezamos revisando los posibles valores de a. Como $6 \times 5 = 30$, el mayor valor posible de a es 6. El menor valor posible de lanzamientos es $a = 0$.

Observemos el caso en el que $a = 2$ para crear un proceso que nos ayude a determinar la cantidad de formas de obtener 30. El proceso es el mismo en todos los casos pero sólo lo mostraremos a detalle para este caso.

Si $a = 2$, esto aporta $2 \times 5 = 10$ puntos. Por lo tanto, necesitamos obtener $30 - 10 = 20$ puntos de los lanzamientos a los otros dos círculos, con valores 2 y 3.

Entonces, encontraremos el máximo valor de b, que es la cantidad de lanzamientos al círculo con valor 3. Queremos que los b lanzamientos aporten un número menor o igual a 20, pero también queremos que falten una cantidad par de puntos, ya que sólo lo podemos completar con lanzamientos al círculo de valor 2.

Si $b = 7$, estos serían $7 \times 3 = 21$ puntos, que es mayor a 20. Si $b = 6$, esto da $6 \times 3 = 18$ puntos. Entonces $c = 1$ completaría para tener exactamente 30 puntos. Observa que la cantidad total de lanzamientos es $a + b + c = 2 + 6 + 1 = 9 \leq 10$, como queríamos. Entonces, una opción es tomar $a = 2$, $b = 6$ y $c = 1$.

Debemos reemplazar los círculos con valor de 3 por círculos de valor 2. Observemos que cada dos círculos de valor 3 dan un total de 6. Así que podemos reemplazar esos dos círculos de valor 3 con tres círculos de valor 2. Esto siginifica que $b = 6 - 2 = 4$ y $c = 1 + 3 = 4$. Observa que $a + b + c = 2 + 4 + 4 = 10 \leq 10$. Entonces, otra posibilidad es tomar $a = 2$, $b = 4$ y $c = 4$.

De nuevo podemos reemplazar esos dos círculos de valor 3 con tres círculos de valor 2. Esto significa que $b = 4 - 2 = 2$ y $c = 4 + 3 = 7$. Observa que en este caso $a + b + c = 2 + 2 + 7 = 11 > 10$, es decir, requiere más de 10 lanzamientos. Por lo tanto, esta no es una opción.

De nuevo podemos reemplazar esos dos círculos de valor 3 con tres círculos de valor 2. Esto significa que $b = 2 - 2 = 0$ y $c = 7 + 3 = 10$. Pero de nuevo $a + b + c = 2 + 0 + 10 = 12 > 10$, por lo que tampoco es una opción.

Ya no podemos reemplazar de nuevo dos monedas de valor 3 por que significaría que b es negativo.

En resumen, cuando $a = 2$, hay dos combinaciones que dan un total de 30 y tales que $a + b + c \leq 10$.

Podemos usar el mismo procedimiento con todos los valores de a. A continuación, mostramos un resumen de los resultados obtenidos.

a	b	c	$5a + 3b + 2c$	$a + b + c$
6	0	0	30	6
5	1	1	30	7
4	2	2	30	8
4	0	5	30	9
3	5	0	30	8
3	3	3	30	9
3	1	6	30	10
2	6	1	30	9
2	4	4	30	10
1	7	2	30	10
0	10	0	30	10

Obtenemos que hay 11 posibles tripletas para la cantidad de lanzamientos que cayeron en cada círculo. Las 11 posibles tripletas (a, b, c) son:

$(6, 0, 0)$, $(5, 1, 1)$, $(4, 2, 2)$, $(4, 0, 5)$, $(3, 5, 0)$, $(3, 3, 3)$, $(3, 1, 6)$, $(2, 6, 1)$, $(2, 4, 4)$, $(1, 7, 2)$, $(0, 10, 0)$

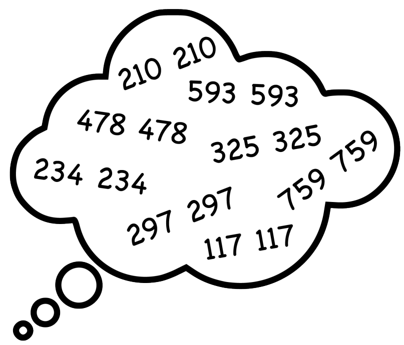
Problema de la Semana

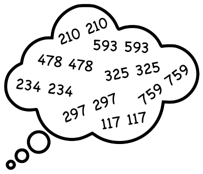
Problema D

Números Favoritos

A Dandan le gustan los números que le recuerdan a su nombre. Es decir, le gustan los números de seis dígitos que se obtienen de repetir un número de tres dígitos, como 305 305, 417 417 y 832 832.

¿Cuál es el máximo común divisor de todos esos números?





Problema de la Semana

Problema D y Solución

Números Favoritos

Problema

A Dandan le gustan los números que le recuerdan a su nombre. Es decir, le gustan los números de seis dígitos que se obtienen de repetir un número de tres dígitos, como 305 305, 417 417 y 832 832.

¿Cuál es el máximo común divisor de todos esos números?

Solución

Para darnos una idea, observemos la factorización en primos de cada uno de los números.

$$\begin{aligned}
305\,305 &= 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 61 \\
417\,417 &= 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 139 \\
832\,832 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 11 \times 13 \times 13
\end{aligned}$$

Observamos que todos estos números son divisibles entre $7 \times 11 \times 13 = 1001$. Estos son los únicos divisores que los tres números tienen en común. Podemos elegir otro número de seis dígitos que conste de un número de tres dígitos repetido y revisar si también es divisible entre 1001. El número 246 246, por ejemplo, es 1001×246. Parece que 1001 podría ser el máximo común divisor de todos estos números, pero aún no lo hemos demostrado.

Sea $abc\,abc$ un número cualquiera de seis dígitos que se puede obtener de repetir el número de tres dígitos abc.

$$\begin{aligned}
abc\,abc &= abc000 + abc \\
&= 1000 \times abc + abc \\
&= 1000 \times abc + 1 \times abc \\
&= 1001 \times abc
\end{aligned}$$

Como $abc\,abc = 1001 \times abc$, entonces es divisible entre 1001. El número $abc\,abc$ en específico, puede tener otros factores, pero 1001 es el mayor divisor que es común para todos. En el primer ejemplo $305\,305 = 1001 \times 5 \times 61$, y en el segundo ejemplo $417\,417 = 1001 \times 3 \times 139$. Ambos números tienen otros factores, pero ningún otro factor común es mayor a 1. En algunos casos puede haber otros factores comunes mayores a 1, pero esto no es cierto en general.

Por lo tanto, hemos demostrado que 1001 es el máximo común divisor de los números de seis dígitos que se pueden formar repitiendo un número de tres dígitos.

Este problema no es complicado si le 'atinas' desde un inicio. La solución que presentamos, muestra un método que se puede utilizar cuando no estás seguro de como comenzar. La idea es intentar algunos ejemplos específicos y luego intentar generalizar la idea, con base en lo que se observa en esos ejemplos específicos. Pero recuerda, que descubrir que 1001 funciona para los cuatro primeros ejemplos no es suficiente para hacer la conclusión general de que 1001 es el máximo común divisor de todos esos números.

Geometría y Medida (G)

VOLVER A LA PORTADA

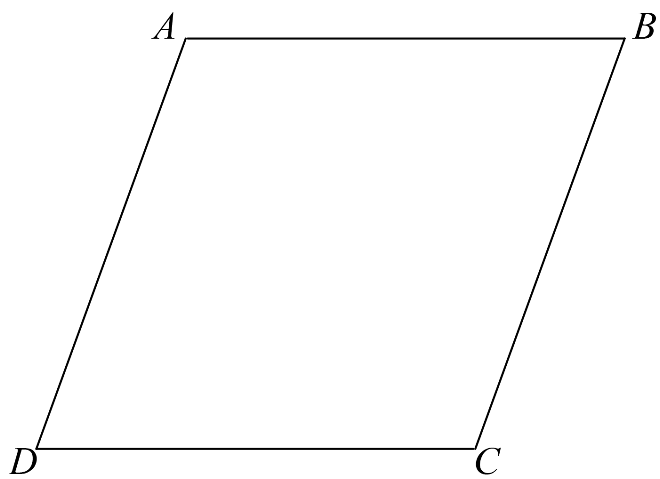
Problema de la Semana

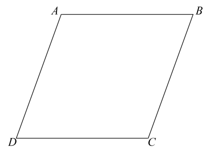
Problema D

Calculando el Ángulo

Carlos dibujó el rombo $ABCD$. Recuerda que un rombo es un cuadrilátero con lados opuestos paralelos y con los cuatro lados del mismo tamaño. En el rombo de Carlos, H está en BC, entre B y C, y K está en CD entre C y D, de forma que $AB = AH = HK = KA$.

Determina la medida, en grados, del ángulo $\angle BAD$.





Problema de la Semana

Problema D y Solución

Calculando el Ángulo

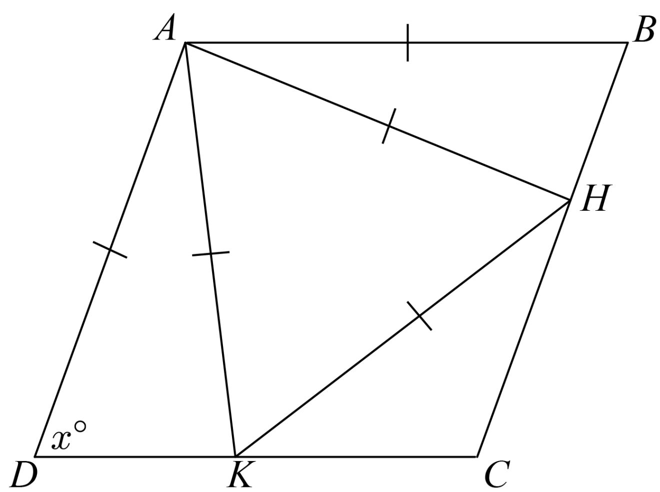
Problema

Carlos dibujó el rombo $ABCD$. Recuerda que un rombo es un cuadrilátero con lados opuestos paralelos y con los cuatro lados del mismo tamaño. En el rombo de Carlos, H está en BC, entre B y C, y K está en CD entre C y D, de forma que $AB = AH = HK = KA$.

Determina la medida, en grados, del ángulo $\angle BAD$.

Solución

Como $ABCD$ es un rombo, sabemos que $AB = BC = CD = DA$. También sabemos que $AB = AH = HK = KA$. Sea $\angle ADK = x^\circ$.

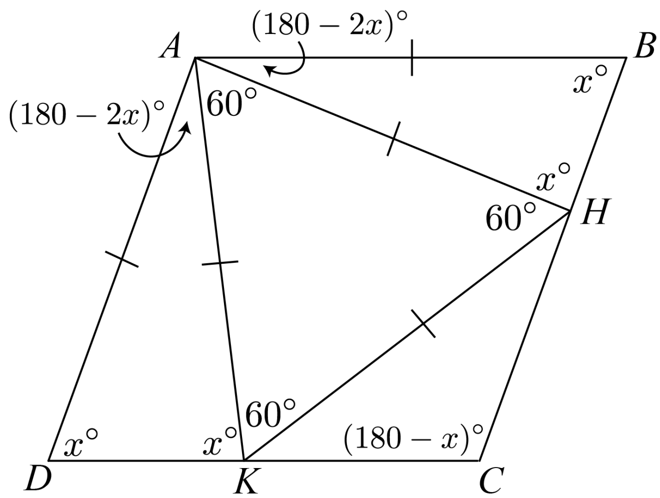


Como $AH = HK = KA$, $\triangle AHK$ es un triángulo equilátero y cada ángulo de $\triangle AHK$ mide 60°. En particular, $\angle HAK = 60^\circ$.

En $\triangle ADK$, $AD = AK$ y entonces $\triangle ADK$ es isósceles. Por lo tanto, $\angle AKD = \angle ADK = x^\circ$. Entonces $\angle DAK = (180 - 2x)^\circ$.

Como $ABCD$ es un rombo, $AB \parallel CD$ y $\angle ADC + \angle BCD = 180^\circ$. Se sigue que $\angle BCD = (180 - x)^\circ$. Pero en el rombo también tenemos que $BC \parallel AD$ y $\angle BCD + \angle ABC = 180^\circ$. Por lo tanto, $\angle ABC = 180^\circ - (180 - x)^\circ = x^\circ$.

En $\triangle AHB$, $AH = AB$ y entonces $\triangle AHB$ es isósceles. Por lo tanto, $\angle AHB = \angle ABH = x^\circ$. Entonces $\angle BAH = (180 - 2x)^\circ$.



Como $ABCD$ es un rombo, $BC \parallel AD$, entonces

$$\begin{aligned}
\angle BAD &= 180^\circ - \angle ABC \\
(180-2x)^\circ + 60^\circ + (180-2x)^\circ &= 180^\circ - x^\circ \\
(420-4x)^\circ &= (180-x)^\circ \\
240^\circ &= (3x)^\circ \\
x^\circ &= 80^\circ
\end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}
\angle BAD &= (180-x)^\circ \\
&= 180^\circ - 80^\circ \\
&= 100^\circ
\end{aligned}$$

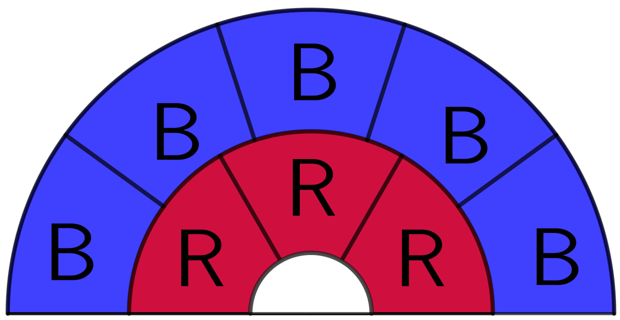
Por lo tanto, $\angle BAD = 100^\circ$.

Problema de la Semana

Problema D

Áreas Coloreadas

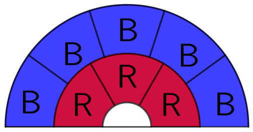
Chandra desea pintar un señalamiento. El señalamiento está compuesto por tres semicírculos concéntricos, que crean una banda externa, una banda intermedia y un semicírculo interno.



La banda externa se divide en cinco regiones con la misma área y se pintará de azul. Cada una de esas regiones lleva una B. La banda intermedia se divide en tres regiones con la misma área y se pintará de rojo. Cada una de esas regiones lleva una R. El semicírculo interno se pintará de blanco.

El diámetro del semicírculo grande es 10 m y el diámetro del semicírculo mediano es 6 m.

Si la razón del área de una región con R entre el área de una región con B es $5 : 6$, ¿cuál es el diámetro del semicírculo interno?



Problema de la Semana

Problema D y Solución

Áreas Coloreadas

Problema

Chandra desea pintar un señalamiento. El señalamiento está compuesto por tres semicírculos concéntricos, que crean una banda externa, una banda intermedia y un semicírculo interno. La banda externa se divide en cinco regiones con la misma área y se pintará de azul. Cada una de esas regiones lleva una B. La banda intermedia se divide en tres regiones con la misma área y se pintará de rojo. Cada una de esas regiones lleva una R. El semicírculo interno se pintará de blanco. El diámetro del semicírculo grande es 10 m y el diámetro del semicírculo mediano es 6 m. Si la razón del área de una región con R entre el área de una región con B es $5:6$, ¿cuál es el diámetro del semicírculo interno?

Solución

Como el área de un círculo con radio r es πr^2, el área de un semicírculo con radio r es $\frac{\pi r^2}{2}$. El semicírculo grande tiene diámetro 10 m y entonces tiene un radio de 5 m. Por lo tanto, el área del semicírculo grande es $\frac{\pi(5)^2}{2} = \frac{25\pi}{2}$ m^2. El semicírculo mediano tiene diámetro 6 m y entonces tiene un radio de 3 m. Por lo tanto, el área del semicírculo mediano es $\frac{\pi(3)^2}{2} = \frac{9\pi}{2}$ m^2.

El área del semicírculo grande está conformada por las áreas de las 5 regiones con B más el área del semicírculo mediano. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 5B + \frac{9\pi}{2} &= \frac{25\pi}{2} \\ 5B &= 8\pi \\ B &= \frac{8\pi}{5} \end{aligned}$$

Como la razón del área de una región con R entre el área de una región con B es $5:6$, tenemos que $\frac{R}{B} = \frac{5}{6}$. Entonces,

$$\begin{aligned} R &= \frac{5B}{6} \\ &= \frac{5}{6}\left(\frac{8\pi}{5}\right) \\ &= \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

Llamemos r al radio del semicírculo interno.
El área del semicírculo mediano está conformada por las áreas de las 3 regiones con R más el área del semicírculo interno. Por lo tanto,

$$\frac{9\pi}{2} = 3R + \frac{\pi r^2}{2}$$

Como $R = \frac{4\pi}{3}$, tenemos que

$$\frac{9\pi}{2} = 4\pi + \frac{\pi r^2}{2}$$

Por lo tanto, $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi r^2}{2}$ que es lo mismo que $r^2 = 1$. Como $r > 0$, entonces $r = 1$.

Por lo tanto, el diámetro del semicírculo pequeño es 2 m.

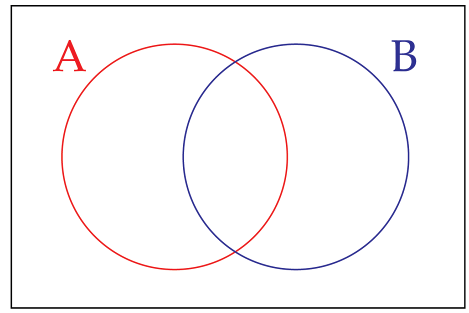
Problema de la Semana

Problema D

Todo en su Lugar 2

(a) Un diagrama de Venn tiene dos círculos, A y B. Cada círculo contiene parejas ordenadas (x, y) tales que x y y son números reales que satisfacen las siguientes condiciones.

A: $y = -x + 1$
B: $y = 3x + 5$

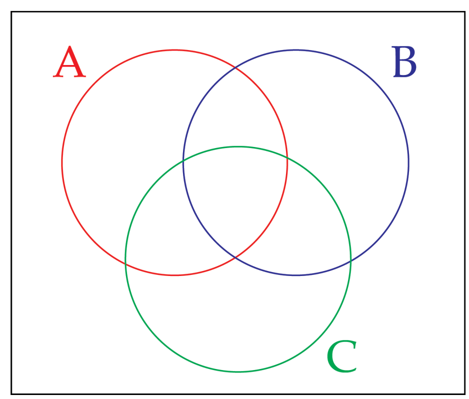


La región donde se sobreponen los círculos contiene parejas ordenadas que están tanto en A como en B, mientras que la región afuera de ambos círculos contiene parejas ordenadas que no están ni en A ni en B.

En total este diagrama de Venn tiene cuatro regiones. Acomoda parejas ordenadas en tantas regiones como puedas. ¿Es posible encontrar una pareja para cada región?

(b) Un diagrama de Venn tiene tres círculos, A, B y C. Cada círculo contiene enteros n que satisfacen lo siguiente.

A: $3n < 20$
B: $n + 9 > 6$
C: n es par



En total este diagrama de Venn tiene ocho regiones. Acomoda enteros en tantas regiones como puedas. ¿Es posible encontrar un entero para cada región?

Problema de la Semana

Problema D y Solución

Todo en su Lugar 2

Problema

(a) Un diagrama de Venn tiene dos círculos, A y B. Cada círculo contiene parejas ordenadas (x, y) tales que x y y son números reales que satisfacen las siguientes condiciones.

A: $y = -x + 1$

B: $y = 3x + 5$

La región donde se traslapan los círculos contiene parejas ordenadas que están tanto en A como en B, mientras que la región afuera de ambos círculos contiene parejas ordenadas que no están ni en A ni en B. En total este diagrama de Venn tiene cuatro regiones. Acomoda parejas ordenadas en tantas regiones como puedas. ¿Es posible encontrar una pareja para cada región?

(b) Un diagrama de Venn tiene tres círculos, A, B y C. Cada círculo contiene enteros n que satisfacen lo siguiente.

A: $3n < 20$

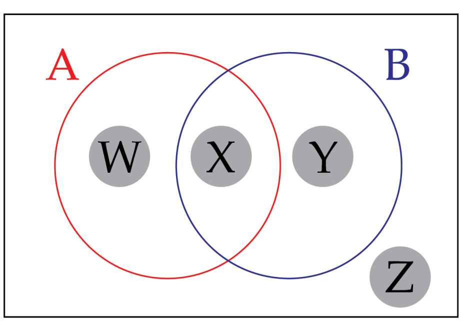
B: $n + 9 > 6$

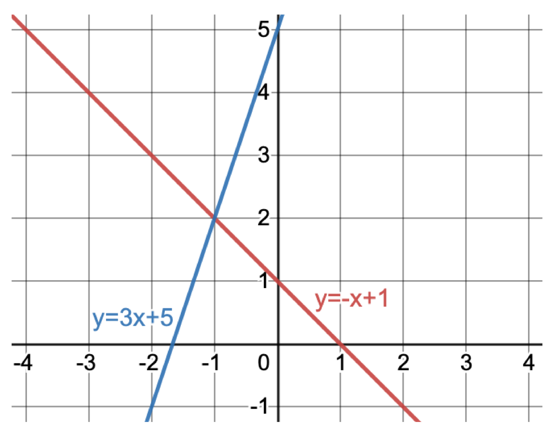
C: n es par

En total este diagrama de Venn tiene ocho regiones. Acomoda enteros en tantas regiones como puedas. ¿Es posible encontrar un entero para cada región?

Solución

(a) Llamamos W, X, Y, y Z a las regiones. Como referencia, graficamos las ecuaciones en una cuadrícula .

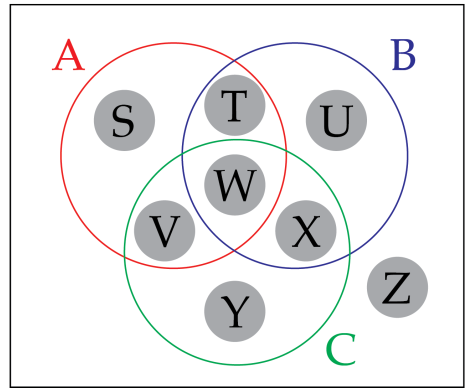




- Las parejas ordenadas (x, y) en la región W deben satisfacer $y = -x + 1$, pero *no* $y = 3x + 5$. Cualquier punto en la línea $y = -x + 1$ que *no* está en la línea $y = 3x + 5$ satisface esto. Un ejemplo es $(0, 1)$.
- Las parejas ordenadas (x, y) en la región X deben satisfacer tanto $y = -x + 1$ como $y = 3x + 5$. El único punto que satisface esto es el punto de intersección, $(-1, 2)$.
- Las parejas ordenadas (x, y) en la región Y deben satisfacer $y = 3x + 5$, pero *no* $y = -x + 1$. Cualquier punto en la línea $y = 3x + 5$ que *no* está en la línea $y = -x + 1$ satisface esto. Un ejemplo es $(0, 5)$.

- Las parejas ordenadas (x, y) en la región Z *no* deben satisfacer $y = 3x + 5$ ni $y = -x + 1$. Cualquier punto que no esté en ninguna de las líneas satisface esto. Un ejemplo es $(2, 2)$.

(b) Hemos llamado a las ocho regiones S, T, U, V, W, X, Y, y Z. Es útil si primero resolvemos las desigualdades.



Para A:

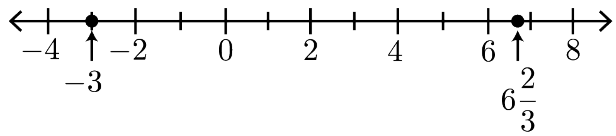
$$3n < 20$$

$$n < \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$$

Para B:

$$n + 9 > 6$$

$$n > -3$$



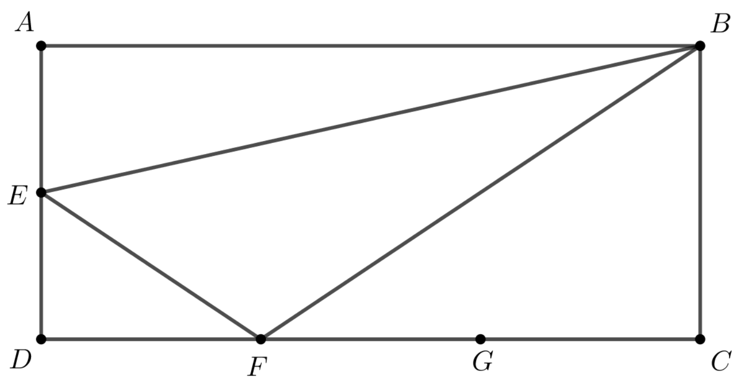
- Cualquier entero en la región S debe ser menor que $6\frac{2}{3}$, menor o igual que -3 y un número impar. Cualquier número impar menor o igual que -3 satisface esto. Un ejemplo es -5.
- Cualquier entero en la región T debe ser menor que $6\frac{2}{3}$, mayor que -3 y un número impar. Los únicos enteros que satisfacen esto son $-1, 1, 3$, y 5.
- Cualquier entero en la región U debe ser mayor o igual que $6\frac{2}{3}$, mayor que -3 y un número impar. Cualquier número impar mayor o igual que $6\frac{2}{3}$ satisface esto. Un ejemplo es 7.
- Cualquier entero en la región V debe ser menor que $6\frac{2}{3}$, menor o igual que -3 y un número par. Cualquier número par menor o igual que -3 satisface esto. Un ejemplo es -4.
- Cualquier entero en la región W debe ser menor que $6\frac{2}{3}$, mayor que -3 y un número par. Los únicos enteros que satisfacen esto son $-2, 0, 2, 4$, y 6.
- Cualquier entero en la región X debe ser mayor o igual que $6\frac{2}{3}$, mayor que -3 y un número par. Cualquier número par mayor o igual que $6\frac{2}{3}$ satisface esto. Un ejemplo es 8.
- Cualquier entero en la región Y debe ser mayor o igual que $6\frac{2}{3}$, menor o igual que -3 y un número par. Ningún entero satisface estas tres condiciones, así que esta región se queda vacía.
- Cualquier entero en la región Z debe ser mayor o igual que $6\frac{2}{3}$, menor o igual que -3 y un número impar. Ningún entero satisface estas tres condiciones, así que esta región también se queda vacía.

Problema de la Semana

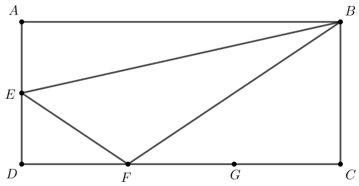
Problema D

El Rectángulo Completo

En el diagrama, $ABCD$ es un rectángulo. Los puntos F y G están sobre DC (con F más cerca de D) de tal forma que $DF = FG = GC$. Sea E el punto medio de AD.



Si el área de $\triangle BEF$ es 30 cm^2, determina el área del rectángulo $ABCD$.



Problema de la Semana

Problema D y Solución

El Rectángulo Completo

Problema

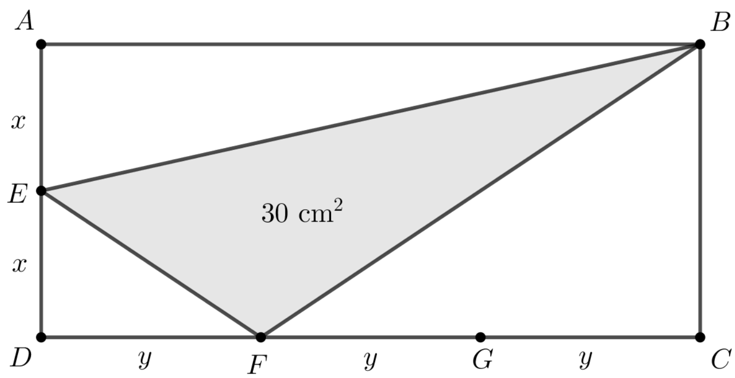
En el diagrama, $ABCD$ es un rectángulo. Los puntos F y G están sobre DC (con F más cerca de D) de tal forma que $DF = FG = GC$. Sea E el punto medio de AD.

Si el área de $\triangle BEF$ es 30 cm^2, determina el área del rectángulo $ABCD$.

Solución

Sea $DF = FG = GC = y$. Entonces tenemos que $AB = DC = 3y$ y que $FC = 2y$.

Como E es punto medio de AD, sea $AE = ED = x$. Entonces $AD = BC = 2x$.



Haremos una ecuación que conecte el área del rectángulo con las áreas de los cuatro triángulos que están dentro del rectángulo.

$$
\begin{aligned}
\text{Área } ABCD &= \text{Área } \triangle ABE + \text{Área } \triangle BCF + \text{Área } \triangle FDE + \text{Área } \triangle BEF \\
AD \times DC &= \frac{AE \times AB}{2} + \frac{BC \times FC}{2} + \frac{DF \times ED}{2} + 30 \\
(2x)(3y) &= \frac{x \times 3y}{2} + \frac{2x \times 2y}{2} + \frac{y \times x}{2} + 30 \\
6xy &= \frac{3xy}{2} + 2xy + \frac{xy}{2} + 30 \\
12xy &= 3xy + 4xy + xy + 60 \\
4xy &= 60 \\
xy &= 15
\end{aligned}
$$

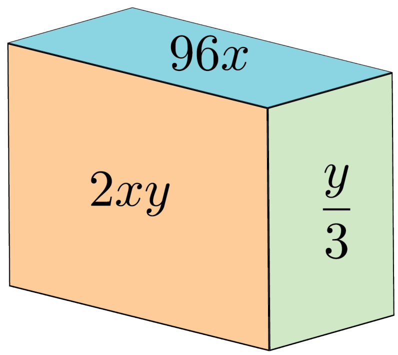
Por lo tanto, el área del rectángulo $ABCD$ es $AD \times DC = (2x)(3y) = 6xy = 6(15) = 90$ cm^2.

Problema de la Semana

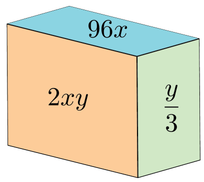
Problema D

Quiero Algo de Volumen

Las áreas de la cara de enfrente, de lado y de arriba de un prisma rectángular son $2xy$, $\frac{y}{3}$, y $96x$ cm^2, respectivamente.



Calcula el volumen del prisma rectangular en términos de x y y.



Problema de la Semana

Problema D y Solución

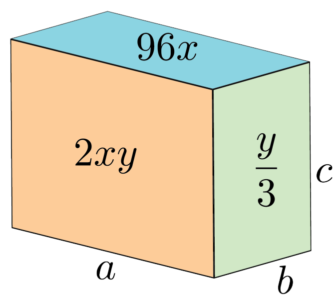
Quiero Algo de Volumen

Problema

Las áreas de la cara de enfrente, de lado y de arriba de un prisma rectángular son $2xy$, $\frac{y}{3}$, y $96x$ cm^2, respectivamente. Calcula el volumen del prisma rectangular en términos de x y y.

Solución

Como $\frac{y}{3}$ y $96x$ son áreas, entonces x y y deben ser positivas. Denotemos por a, b, y c a la longitud, el ancho y la altura del prisma rectangular, respectivamente.



El volumen es igual al producto abc.

Multiplicando las longitudes de los lados, podemos escribir las siguientes tres ecuaciones usando las áreas que conocemos.

$$\begin{aligned} ac &= 2xy \\ bc &= \frac{y}{3} \\ ab &= 96x \end{aligned}$$

Multiplicando los lados izquierdos y derechos de cada una de las tres ecuaciones obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (ac)(bc)(ab) &= (2xy)\left(\frac{y}{3}\right)(96x) \\ a^2b^2c^2 &= 64x^2y^2 \\ (abc)^2 &= (8xy)^2 \\ \sqrt{(abc)^2} &= \pm\sqrt{(8xy)^2} \\ abc &= \pm 8xy \end{aligned}$$

Como todas las cantidades son positivas, podemos concluir que $abc = 8xy$.

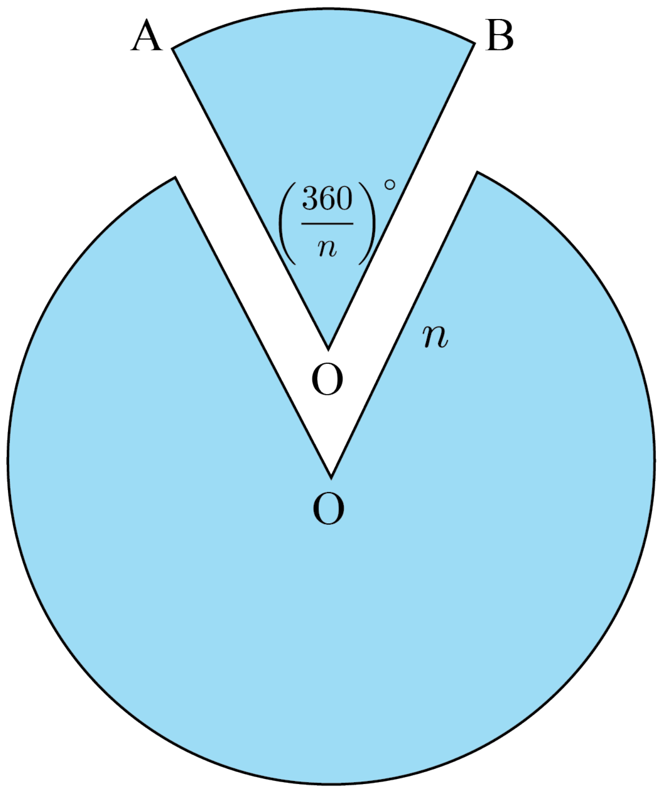
Por lo tanto, el volumen del prisma rectangular es $8xy$ cm^3.

Problema de la Semana

Problema D

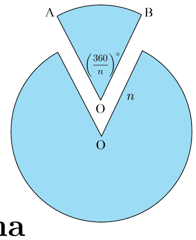
Una Rebanada a la Vez

Los puntos A y B están en un círculo con centro O y radio n de forma que $\angle AOB = \left(\frac{360}{n}\right)^\circ$. El sector AOB se separa del círculo.



Determina todos los enteros positivos n para los cuales el perímetro del sector AOB es mayor a 20 y menor a 30.

Nota: Te puede ser útil el hecho de que la razón entre la longitud de un arco y longitud la circunferencia es la misma que la razón entre el ángulo del sector y 360°. De hecho, obtenemos la misma razón si comparamos el área del sector con el área total del círculo.



Problema de la Semana

Problema D y Solución

Una Rebanada a la Vez

Problema

Los puntos A y B están en un círculo con centro O y radio n de forma que $\angle AOB = \left(\frac{360}{n}\right)^\circ$. El sector AOB se separa del círculo. Determina todos los enteros positivos n para los cuales el perímetro del sector AOB es mayor a 20 y menor a 30.

NOTA: Te puede ser útil el hecho de que la razón entre la longitud de un arco y longitud la circunferencia es la misma que la razón entre el ángulo del sector y 360°. De hecho, obtenemos la misma razón si comparamos el área del sector con el área total del círculo.

Solución

En general, si el ángulo del sector crece y el radio de se queda igual, entonces la longitud del arco también crece. Pero en este problema, cuando el radio n crece, el sector del ángulo $\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$ decrece. Por lo que es difícil "ver" qué pasa con la longitud del arco.

Sabemos que la razón entre la longitud del arco y la circunferencia es la misma que la razón entre ángulo del sector y 360°. Es decir,

$$\frac{\text{longitud del arco } AB}{\text{circunferencia}} = \frac{\text{ángulo del sector } AOB}{360^\circ}$$

Reacomodando, obtenemos

$$\text{longitud del arco } AB = \frac{\text{ángulo del sector } AOB}{360^\circ} \times \text{circunferencia}$$

Como $d = 2n$, sabemos que: circunferencia $= \pi d = \pi \times 2n$. Entonces,

$$\text{longitud del arco } AB = \frac{\frac{360}{n}}{360} \times \pi \times 2n = 2\pi$$

Ahora podemos usar la longitud de arco para calcular el perímetro de AOB.

$$\begin{aligned}\text{perímetro de } AOB &= AO + OB + \text{longitud del arco } AB\\ &= n + n + 2\pi\\ &= 2n + 2\pi\end{aligned}$$

Si el perímetro es mayor a 20, entonces

$$\begin{aligned}2n + 2\pi &> 20\\ n + \pi &> 10\\ n &> 10 - \pi \approx 6.9\end{aligned}$$

Si el perímetro es menor a 30, entonces

$$\begin{aligned}2n + 2\pi &< 30\\ n + \pi &< 15\\ n &< 15 - \pi \approx 11.9\end{aligned}$$

Queremos valores enteros de n tales que $n > 6.9$ y $n < 11.9$. Los únicos valores enteros de n que satisfacen estas condiciones son $n = 7$, $n = 8$, $n = 9$, $n = 10$ y $n = 11$.

Problema de la Semana

Problema D

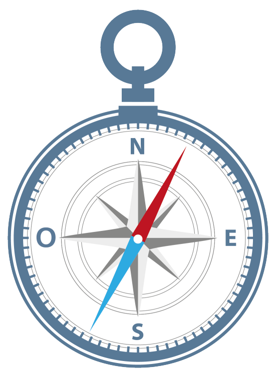
Geocaching Cartesiano

Geocaching es un tipo de búsqueda del tesoro al aire libre, donde las personas usan dispositivos GPS para buscar objetos escondidos, llamados caches. En Geocaching Cartesiano, en lugar de usar un GPS, las ubicaciones se describen usando coordenadas Cartesianas.

Hilde designa un gran campo para jugar Geocaching Cartesiano, mide las distancias en kilómetros de forma que el punto $(1, 0)$ está a 1 km al este del punto $(0, 0)$, por ejemplo.

Hilde empieza en el punto $A(0, 0)$, luego camina al noroeste en línea recta hasta un punto B, en donde esconde un cache. Luego desde B, camina al noreste en línea recta hasta el punto $C(0, 4)$ donde esconde otro cache. Finalmente, regresa en línea recta al punto A.

¿Qué distancia recorrió Hilde en total?



Problema de la Semana
Problema D y Solución
Geocaching Cartesiano

Problema

Geocaching es un tipo de búsqueda del tesoro al aire libre, donde las personas usan dispositivos GPS para buscar objetos escondidos, llamados caches. En Geocaching Cartesiano, en lugar de usar un GPS, las ubicaciones se describen usando coordenadas Cartesianas.

Hilde designa un gran campo para jugar Geocaching Cartesiano, mide las distancias en kilómetros de forma que el punto $(1,0)$ está a 1 km al este del punto $(0,0)$, por ejemplo.

Hilde empieza en el punto $A(0,0)$, luego camina al noroeste en línea recta hasta un punto B, en donde esconde un cache. Luego desde B, camina al noreste en línea recta hasta el punto $C(0,4)$ donde esconde otro cache. Finalmente, regresa en línea recta al punto A.

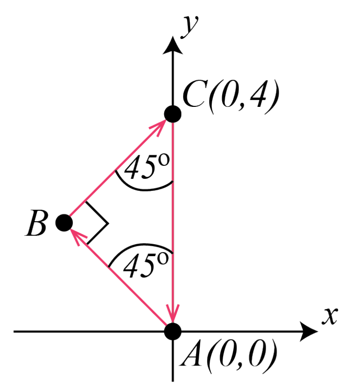
¿Qué distancia recorrió Hilde en total?

Solución

Mostraremos cuatro soluciones distintas para este problema.

Solución 1

Si caminas hacia el noroeste desde $A(0,0)$, la línea que describe la trayectoria forma un ángulo de 45° con la parte positiva del eje y. El punto B se encuentra en algún lugar de esta línea. Si caminas hacia el noreste desde B a $C(0,4)$, la trayectoria intersectará al eje y formando un ángulo de 45°.



En $\triangle ABC$, $\angle BAC = \angle BCA = 45°$. Se sigue que $\triangle ABC$ es isósceles. Como dos de los ángulos en $\triangle ABC$ son 45°, entonces el tercer ángulo es $\angle ABC = 90°$ por lo que es un triángulo rectángulo.

La distancia del punto A al punto C es $AC = 4$ km. Sea $BC = AB = m$, para algún $m > 0$. Utilizando el Teorema de Pitágoras, podemos encontrar el valor de m.

$$\begin{aligned} AC^2 &= BC^2 + AB^2 \\ 4^2 &= m^2 + m^2 \\ 16 &= 2m^2 \\ 8 &= m^2 \end{aligned}$$

Entonces como $m > 0$, obtenemos $m = \sqrt{8}$.

Por lo tanto, Hilde recorrió $AB + BC + AC = \sqrt{8} + \sqrt{8} + 4 = (2\sqrt{8} + 4)$ km.

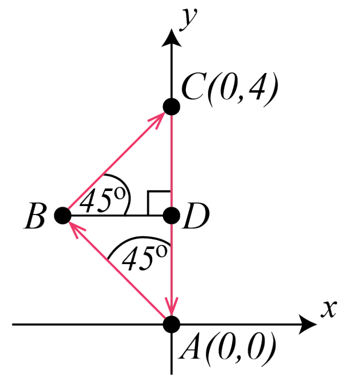
Observa que $\left(2\sqrt{8} + 4\right)$ es una respuesta *exacta*. Podemos usar una calculadora para determinar que la distancia es aproximadamente 9.7 km.

La distancia total recorrida se puede simplificar como:

$$2\sqrt{8} + 4 = 2(\sqrt{4}\sqrt{2}) + 4 = 2(2\sqrt{2}) + 4 = 4\sqrt{2} + 4$$

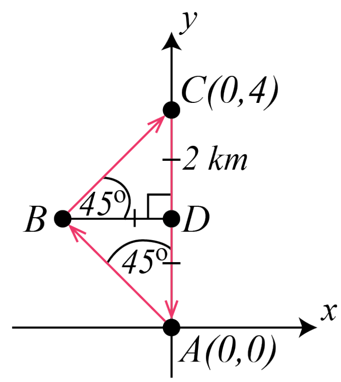
Este método para simplificar radicales se enseña en cursos más avanzados de matemáticas.

Solución 2



Si caminas hacia el noroeste desde $A(0,0)$, la línea que describe la trayectoria forma un ángulo de $45°$ con la parte positiva del eje y. El punto B se encuentra en algún lugar de esta línea. Si caminas hacia el noreste desde B a $C(0,4)$, la trayectoria intersectará al eje y formando un ángulo de $45°$.

Desde B, dibujamos un segmento perpendicular al eje y, que interesecta al eje y en D. Cuando camines en dirección noreste desde B a C, la trayectoria forma un ángulo de $\angle DBC = 45°$.



En $\triangle ABD$, $\angle BAD = 45°$ y $\angle ADB = 90°$. Se sigue que $\angle ABD = 45°$, $\triangle ABD$ es isósceles y $BD = AD$.

En $\triangle CBD$, $\angle CBD = 45°$ y $\angle CDB = 90°$. se sigue que $\angle BCD = 45°$, $\triangle CBD$ es isósceles y $CD = BD$.

La distancia entre A y C es $AC = 4$ km. Como $CD = AD$ y $AC = CD + AD$, entonces sabemos que $CD = AD = 2$ km. Como $CD = BD$ entonces $CD = BD = AD = 2$ km.

Por el Teorema de Pitágoras en $\triangle ABD$, podemos calcular la longitud de AB.

$$\begin{aligned} AB^2 &= BD^2 + AD^2 \\ AB^2 &= 2^2 + 2^2 \\ AB^2 &= 8 \end{aligned}$$

Entonces como $AB > 0$, tenemos que $AB = \sqrt{8}$.

Usando el mismo razonamiento en $\triangle CBD$, obtenemos $BC = \sqrt{8}$.

Entonces, la distancia total recorrida por Hilde es
$AB + BC + AC = \sqrt{8} + \sqrt{8} + 4 = (2\sqrt{8} + 4)$ km.

Observa que $\left(2\sqrt{8} + 4\right)$ es una respuesta *exacta*. Podemos usar una calculadora para determinar que la distancia es aproximadamente 9.7 km.

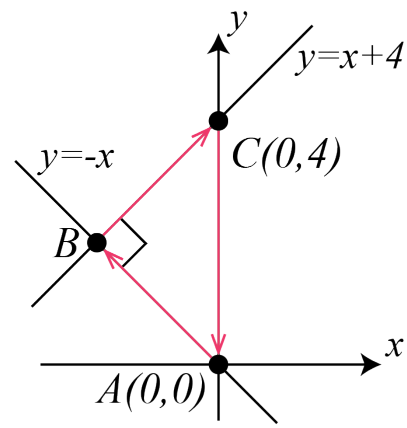
La distancia total recorrida se puede simplificar como:

$$2\sqrt{8} + 4 = 2(\sqrt{4}\sqrt{2}) + 4 = 2(2\sqrt{2}) + 4 = 4\sqrt{2} + 4$$

Este método para simplificar radicales se enseña en cursos más avanzados de matemáticas.

Solución 3

Si caminas hacia el noroeste desde $A(0,0)$, la línea que describe la trayectoria forma un ángulo de $45°$ con la parte positiva del eje y. Es decir, la línea tiene una pendiente de -1. Como esta línea pasa por $A(0,0)$ entonces la ecuación de la línea que pasa por A y B es $y = -x$.



El punto B se encuentra en algún lugar de la recta $y = -x$. Una recta en dirección noreste, sería perpendicular a la recta con dirección noroeste. Como la línea en dirección noroeste tiene pendiente -1, entonces la línea con dirección noreste tiene pendiente 1. Esta segunda línea pasa por B y C, tiene pendiente 1 e intersecta al eje y en el punto 4, que es la coordenada y de C. Entonces la ecuación de la segunda línea es $y = x + 4$.

Como el punto B se encuentra en la recta $y = -x$ y la recta $y = x + 4$, podemos resolver el sistema de ecuaciones para encontrar las coordenadas de B. Como $y = y$,

$$\begin{aligned} -x &= x + 4 \\ -2x &= 4 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Si sustituimos $x = -2$ en $y = -x$, obtenemos $y = 2$. Entonces las coordenadas de B son $(-2, 2)$.

Utilizando la fórmula para la distancia, podemos encontrar las longitudes de AB y BC.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-2-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \\ BC &= \sqrt{(0-(-2))^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \end{aligned}$$

La distancia entre A y C es $AC = 4$ km. Es decir, $AC = 4$.

Entonces, la distancia total recorrida por Hilde es
$AB + BC + AC = \sqrt{8} + \sqrt{8} + 4 = (2\sqrt{8} + 4)$ km.

Observa que $\left(2\sqrt{8} + 4\right)$ es una respuesta *exacta*. Podemos usar una calculadora para determinar que la distancia es aproximadamente 9.7 km.

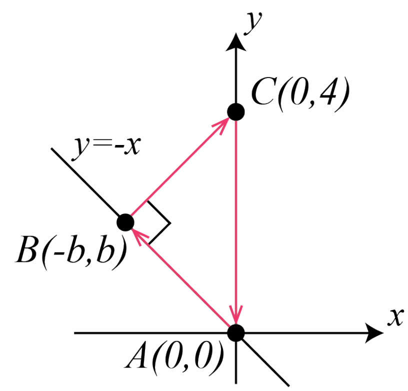
La distancia total recorrida se puede simplificar como:

$$2\sqrt{8} + 4 = 2(\sqrt{4}\sqrt{2}) + 4 = 2(2\sqrt{2}) + 4 = 4\sqrt{2} + 4$$

Este método para simplificar radicales se enseña en cursos más avanzados de matemáticas.

Solución 4

Si caminas hacia el noroeste desde $A(0,0)$, la línea que describe la trayectoria forma un ángulo de 45° con la parte positiva del eje y. Es decir, la línea tiene una pendiente de -1. Como esta línea pasa por $A(0,0)$ entonces la ecuación de la línea que pasa por A y B es $y=-x$. Una recta en dirección noreste, sería perpendicular a la recta con dirección noroeste, entonces AB es perpendicular a BC, es decir $\angle ABC = 90°$.



El punto B se encuantra en algún lugar de la recta $y=-x$. Digamos que las coordenadas de B son $(-b,b)$ para algún $b>0$.

Utilizando la fórmula para la distancia, podemos encontrar las longitudes de AB y BC.

$$AB = \sqrt{(-b-0)^2+(b-0)^2} = \sqrt{b^2+b^2} = \sqrt{2b^2}$$
$$BC = \sqrt{(0-(-b))^2+(4-b)^2} = \sqrt{b^2+16-8b+b^2} = \sqrt{2b^2-8b+16}$$

La distancia entre A y C es $AC = 4$ km. Es decir, $AC=4$.

Utilizando el Teorema de Pitágoras podemos encontrar el valor de b.

$$\begin{aligned}
AC^2 &= AB^2+BC^2\\
4^2 &= \left(\sqrt{2b^2}\right)^2+\left(\sqrt{2b^2-8b+16}\right)^2\\
16 &= 2b^2+(2b^2-8b+16)\\
16 &= 4b^2-8b+16\\
0 &= 4b^2-8b\\
0 &= b^2-2b\\
0 &= b(b-2)\\
b &= 0,2
\end{aligned}$$

Como $b>0$, se sigue que $b=2$. Podemos sustituir $b=2$ en nuestra expresión para AB y BC.

$$AB = \sqrt{2b^2} = \sqrt{2(2)^2} = \sqrt{8}$$
$$BC = \sqrt{2b^2-8b+16} = \sqrt{2(2)^2-8(2)+16} = \sqrt{8}$$

Entonces, la distancia total recorrida por Hilde es
$AB+BC+AC = \sqrt{8}+\sqrt{8}+4 = (2\sqrt{8}+4)$ km.

Observa que $\left(2\sqrt{8}+4\right)$ es una respuesta *exacta*. Podemos usar una calculadora para determinar que la distancia es aproximadamente 9.7 km.

La distancia total recorrida se puede simplificar como:

$$2\sqrt{8}+4 = 2(\sqrt{4}\sqrt{2})+4 = 2(2\sqrt{2})+4 = 4\sqrt{2}+4$$

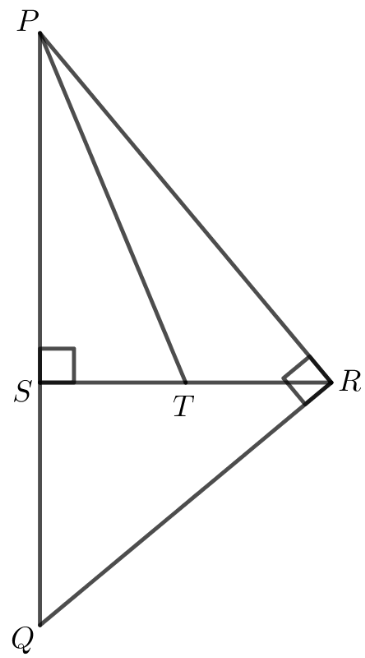
Este método para simplificar radicales se enseña en cursos más avanzados de matemáticas.

Problema de la Semana

Problema D

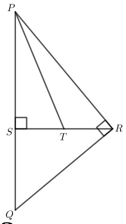
¿Cuál es el Término?

$\triangle PQR$ es un triángulo rectángulo con $\angle PRQ = 90°$. S es el punto en la recta PQ tal que SR es altura de $\triangle PQR$. T es el punto en la recta SR tal que PT es mediana de $\triangle PSR$.



Si la longitud de la mediana PT es 39 y la longitud de PS es 36, determine cuánto mide QS.

NOTA: la *altura* de un triángulo es un segmento trazado desde un vértice del triángulo y que es perpendicular al lado opuesto. La *mediana* es un segmento trazado desde un vértice del triángulo al punto medio del lado opuesto.



Problema de la Semana

Problema D y Solución

¿Cuál es el Término?

Problema

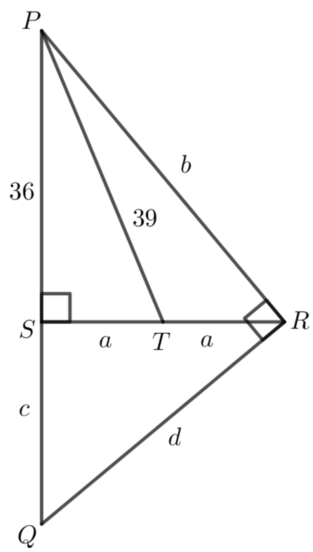
$\triangle PQR$ es un triángulo rectángulo con $\angle PRQ = 90°$. S es el punto en la recta PQ tal que SR es altura de $\triangle PQR$. T es el punto en la recta SR tal que PT es mediana de $\triangle PSR$.

Si la longitud de la mediana PT es 39 y la longitud de PS es 36, determine cuánto mide QS.

NOTA: la *altura* de un triángulo es un segmento trazado desde un vértice del triángulo y que es perpendicular al lado opuesto. La *mediana* es un segmento trazado desde un vértice del triángulo al punto medio del lado opuesto.

Solución

Como T es mediana en $\triangle PSR$, $ST = TR$. Sea $ST = TR = a$ y sean $PR = b$, $QS = c$ y $QR = d$. En el siguiente diagrama se muestran las variables y la información proporcionada $PS = 36$ y $PT = 39$.



Como $\triangle PST$ tiene un ángulo recto en S,

$$\begin{aligned} ST^2 &= PT^2 - PS^2 \\ a^2 &= 39^2 - 36^2 \\ &= 225 \end{aligned}$$

Entonces, como $a > 0$, obtenemos que $a = 15$. Por lo tanto, $SR = 2a = 30$.

Como $\triangle PSR$ tiene un ángulo recto en S,

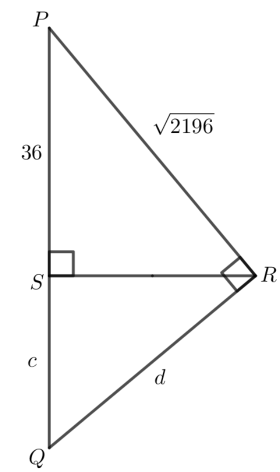
$$\begin{aligned} PR^2 &= PS^2 + SR^2 \\ b^2 &= 36^2 + 30^2 \\ &= 2196 \end{aligned}$$

Entonces, como $b > 0$, se sigue que $b = \sqrt{2196}$.

Ahora usaremos $a = 15$ y $b = \sqrt{2196}$ en las siguientes tres soluciones.

Solución 1

En $\triangle PSR$ y $\triangle PRQ$, tenemos dos ángulos comunes $\angle PSR = \angle PRQ = 90^\circ$ y $\angle SPR = \angle QPR$. Por lo tanto, $\triangle PSR$ es semejante a $\triangle PRQ$. Se sigue que



$$\begin{aligned} \frac{PS}{PR} &= \frac{PR}{PQ} \\ \frac{36}{\sqrt{2196}} &= \frac{\sqrt{2196}}{36+c} \\ 1296 + 36c &= 2196 \\ 36c &= 900 \\ c &= 25 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la longitud de QS es 25.

Solución 2

Como $\triangle RSQ$ tiene un ángulo recto en S, $QR^2 = QS^2 + SR^2 = c^2 + 30^2 = c^2 + 900$.
Por lo tanto, $d^2 = c^2 + 900$.

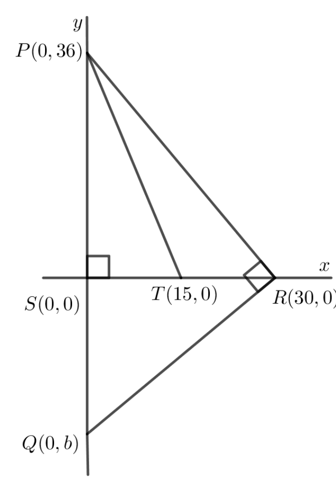
Como $\triangle PQR$ tiene un ángulo recto en R, $PQ^2 = PR^2 + QR^2$. Entonces, $(36 + c)^2 = (\sqrt{2196})^2 + d^2$, y simplificando obtenemos $1296 + 72c + c^2 = 2196 + d^2$. Esto se reduce a $c^2 + 72c = 900 + d^2$.

Sustituyendo $d^2 = c^2 + 900$, obtenemos $c^2 + 72c = 900 + c^2 + 900$. Simplificando, obtenemos $72c = 1800$ y concluimos que $c = 25$.

Por lo tanto, la longitud de QS es 25.

Solución 3

Podemos trazar $\triangle PQR$ en el plano cartesiano de forma que PQ esté sobre el eje y, y la altura SR esté sobre la parte positiva del eje x, con S en el origen. Entonces P tiene coordenadas $(0, 36)$, T tiene coordenadas $(15, 0)$, y R tiene coordenadas $(30, 0)$.
Como Q está sobre el eje y, denotamos las coordenadas de Q por $(0, b)$ con $b < 0$.
Observa que



$$\text{pendiente } PR = \frac{36-0}{0-30} = \frac{-6}{5} \text{ y pendiente } QR = \frac{b-0}{0-30} = \frac{b}{-30}$$

Como $\angle PRQ = 90^\circ$, $PR \perp QR$, y entonces la pendiente de una es el recíproco negativo de la otra. Es decir, $\frac{b}{-30} = \frac{5}{6}$, y entonces $b = -25$.

Se sigue que las coordenadas de Q son $(0, -25)$. Por lo tanto, la longitud de QS es 25.

Álgebra (A)

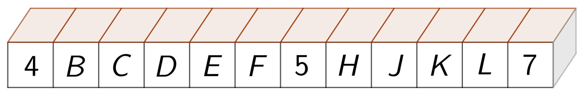
VOLVER
A LA
PORTADA

Problema de la Semana

Problema D

Números Bloqueados

Doce bloques están acomodados como se muestra en la figura.



La letra que se muestra enfrente de cada bloque representa un número. La suma de los números en cualesquiera cuatro bloques consecutivos es 25. Determina el valor de $B + F + K$.

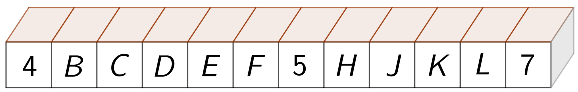
Problema de la Semana

Problema D y Solución

Números Bloqueados

Problema

Doce bloques están acomodados como se muestra en la figura.



La letra que se muestra enfrente de cada bloque representa un número. La suma de los números en cualesquiera cuatro bloques consecutivos es 25. Determina el valor de $B + F + K$.

Solución

Como la suma de los números en cualesquiera cuatro bloques consecutivos es la misma, si nos fijamos en los primeros cinco bloques, tenemos que

$$4 + B + C + D = B + C + D + E$$

Si restamos B, C y D de ambos lados obtenemos $E = 4$. De manera similar, si nos fijamos en los bloques del quinto al noveno, obtenemos que $J = 4$.

De nuevo, como la suma de los números en cualesquiera cuatro bloques consecutivos es la misma, si nos fijamos en los bloques del tercero al séptimo, tenemos que

$$C + D + E + F = D + E + F + 5$$

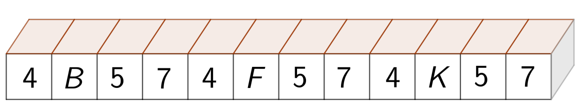
Si restamos D, E, y F de ambos lados obtenemos $C = 5$. De manera similar, si nos fijamos en los bloques del séptimo al décimo primero, obtenemos que $L = 5$.

Una vez más, como la suma de los números en cualesquiera cuatro bloques consecutivos es la misma, si nos fijamos en los bloques del octavo al décimo segundo, tenemos que

$$H + J + K + L = J + K + L + 7$$

Si restamos J, K y L de ambos lados obtenemos $H = 7$. De manera similar, si nos fijamos en los bloques del cuarto al octavo, obtenemos que $D = 7$.

Con esa información, ahora sabemos que los bloques se ven así:



A partir de ahora presentaremos dos soluciones.

Solución 1:
Como la suma de cualesquiera cuatro números consecutivos es 25, usando los primeros 4 bloques vemos que

$$\begin{aligned} 4 + B + 5 + 7 &= 25 \\ B + 16 &= 25 \\ B &= 9 \end{aligned}$$

Análogamente, podemos obtener $F = 9$ y $K = 9$.

Por lo tanto, $B + F + K = 27$.

Solución 2:

Observamos que los doce bloques se pueden separar en tres grupos de cuatro bloques consecutivos. Cada uno de estos grupos suma 25, entonces las suma total de los bloques es $3 \times 25 = 75$.

Por otro lado, la suma total es

$$4 + B + 5 + 7 + 4 + F + 5 + 7 + 4 + K + 5 + 7 = 48 + B + F + K$$

Esto significa que

$$48 + B + F + K = 75$$

y si restamos 48 obtenemos

$$B + F + K = 27.$$

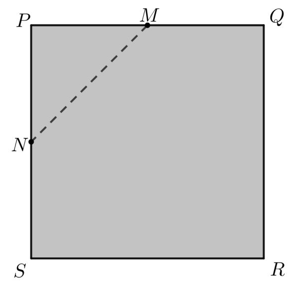
Por lo tanto, $B + F + K = 27$.

Problema de la Semana

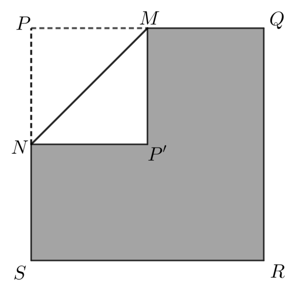
Problema D

De Cuadrado a Hexágono

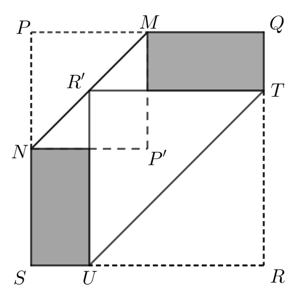
Un pedazo de papel cuadrado, $PQRS$, tiene lados de longitud 40 cm. El papel es gris de un lado y blanco del otro lado. Sea M el punto medio de del lado PQ y sea N el punto medio del lado PS.



Doblamos el papel en la línea MN de forma que la esquina P toca de nuevo al papel en el punto P'.



El punto T está sobre QR y el punto U está sobre SR de forma que TU es paralelo a MN, y cuando se dobla el papel en la línea TU, la esquina R toca de nuevo al papel en el punto R' que está sobre MN.



¿Cuál es el área del hexágono $NMQTUS$?

Las siguientes propiedades de las diagonales de un cuadrado te pueden ser útiles:

- las diagonales tienen el mismo tamaño;
- las diagonales son perpendiculares y se cortan a la mitad; y
- las diagonles dividen a la mitad los ángulos de las esquinas.

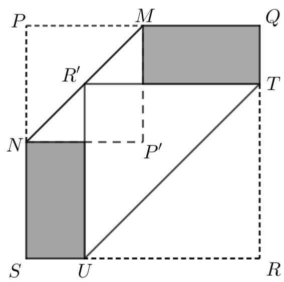
Problema de la Semana

Problema D y Solución

De Cuadrado a Hexágono

Problema

Un pedazo de papel cuadrado, $PQRS$, tiene lados de longitud 40 cm. El papel es gris de un lado y blanco del otro lado. Sea M el punto medio de del lado PQ y sea N el punto medio del lado PS. Doblamos el papel en la línea MN de forma que la esquina P toca de nuevo al papel en el punto P'. El punto T está sobre QR y el punto U está sobre SR de forma que TU es paralelo a MN, y cuando se dobla el papel en la línea TU, la esquina R toca de nuevo al papel en el punto R' que está sobre MN.



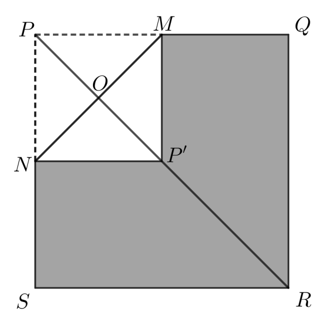
¿Cuál es el área del hexágono $NMQTUS$?

Solución

Para determinar el área del hexágono $NMQTUS$, tomaremos el área del cuadrado $PQRS$ y le restaremos las áreas de $\triangle PMN$ y de $\triangle TRU$.

Como M y N son puntos medios de PQ y PS, respectivamente, sabemos que $PM = \frac{1}{2}(PQ) = 20$ cm y $PN = \frac{1}{2}(PS) = 20$ cm. Por lo tanto, $PM = PN = 20$ y $\triangle PMN$ es un triángulo rectángulo isósceles. Entonces $\angle PNM = \angle PMN = 45°$.

Después del primer doblez, P toca al papel en P'. $\triangle P'MN$ es una reflexión de $\triangle PMN$ a través de la línea MN. Entonces $\angle P'MN = \angle PMN = 45°$ y $\angle P'NM = \angle PNM = 45°$. Por lo tanto, $\angle PMP' = \angle PNP' = 90°$. Como los cuatro lados de $PMP'N$ tienen la misma longitud, y las cuatro esquinas miden 90°, $PMP'N$ es un cuadrado.



Como $\angle MPP' = \angle MPR = 45°$, la diagonal PP' del cuadrado $PMP'N$ está sobre la diagonal PR del cuadrado $PQRS$. Sea O la intersección de las dos diagonales del cuadrado $PMP'N$. También es la intersección de MN y PR. (Luedo demostraremos que de hecho es el punto R', el punto donde hace contacto R después del segundo doblez.)

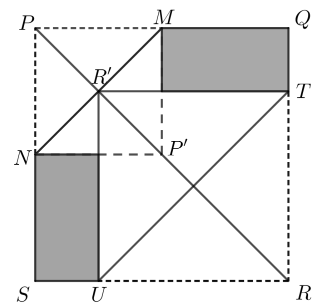
La longitud de la diagonal de $PMP'N$ se puede obtener con el Teorema de Pitágoras.

$$PP' = \sqrt{(PM)^2 + (MP')^2} = \sqrt{20^2 + 20^2} = \sqrt{800} = \sqrt{400}\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$$

Entonces, $PO = \frac{1}{2}(PP') = \frac{1}{2}(20\sqrt{2}) = 10\sqrt{2}$ cm.

En los últimos dos pasos para calcular PP' simplificamos el radical, haremos esto varias veces durante la solución. A continuación mostramos el proceso para simplificar radicales, para aquellos que no estén familiarizados:

- Encuentra el mayor cuadrado perfecto que divide al radicando (el número dentro de la raíz). En este caso, 400 es el mayor cuadrado perfecto que divide a 800.
- Reescribe el radicando como el producto del cuadrado perfecto y el factor restante. En este caso, obtenemos $\sqrt{400 \times 2}$.
- Obtén la raíz cuadrada del cuadrado perfecto. En este caso, obtenemos $20\sqrt{2}$.



Como TU es paralela a MN, tenemos que $\angle RTU = \angle RUT = 45°$ y $\triangle TRU$ es un triángulo rectángulo isósceles con $TR = RU$. Como $\triangle TRU$ se refleja en el segmento TU y R' es la imagen de R, obtenemos otro cuadrado, $TRUR'$. No daremos los detalles porque el argumento es muy similar a lo que hicimos con $PMP'N$. Como $\angle TRR' = \angle TRP = 45°$, RR' está sobre la diagonal PR. Además, R' está sobre MN. Esto significa que R' y O son el mismo punto y entonces $PR' = PO = 10\sqrt{2}$ cm.

Para calcular la longitud de la diagonal de $PQRS$ podemos usar el Teorema de Pitágoras.

$$PR = \sqrt{(PQ)^2 + (QR)^2} = \sqrt{40^2 + 40^2} = \sqrt{3200} = \sqrt{1600}\sqrt{2} = 40\sqrt{2}$$

La longitud de RR' es igual a la longitud de PR menos la longitud de PR'.

$$RR' = PR - PR' = 40\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$$

Pero $RR' = TU$, entonces $TU = 30\sqrt{2}$ cm. Sea $TR = RU = x$. Entonces, usando el Teorema de Pitágoras en $\triangle TRU$,

$$\begin{aligned}
(TR)^2 + (RU)^2 &= (TU)^2 \\
x^2 + x^2 &= (30\sqrt{2})^2 \\
x^2 + x^2 &= 900 \times 2 \\
2x^2 &= 1800 \\
x^2 &= 900
\end{aligned}$$

Como $x > 0$, obtenemos que $x = 30$ cm. Ahora tenemos suficiente información para calcular el área del hexágono $NMQTUS$.

$$\begin{aligned}
\text{Área } NMQTUS &= \text{Área } PQRS - \text{Área } \triangle PMN - \text{Área } \triangle TRU \\
&= PQ \times QR - \frac{PM \times PN}{2} - \frac{TR \times RU}{2} \\
&= 40 \times 40 - \frac{20 \times 20}{2} - \frac{30 \times 30}{2} \\
&= 1600 - \frac{400}{2} - \frac{900}{2} \\
&= 1600 - 200 - 450 \\
&= 950
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el área del hexágono $NMBPQD$ es 950 cm^2.

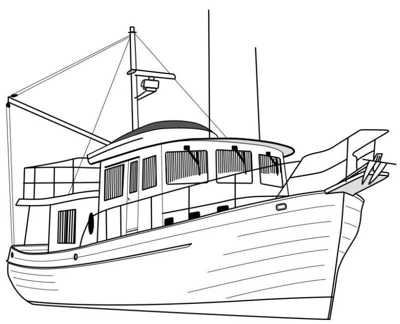
Problema de la Semana

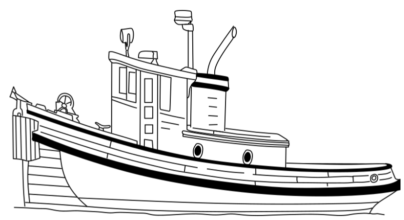
Problema D

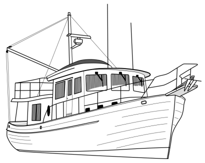
Botes En Venta

Harold, un gerente de marina, compró dos botes. Luego vendió los botes, el primero con una ganancia de 40% y el segundo con una ganancia de 60%. La ganancia total de la venta de los dos botes fue 54% y el precio total de la venta de ambos botes fue $88 704.

¿Cuánto pagó Harold originalmente por cada uno de los botes?



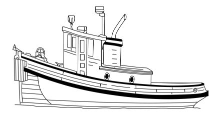




Problema de la Semana

Problema D y Solución

Botes En Venta



Problema

Harold, un gerente de marina, compró dos botes. Luego vendió los botes, el primero con una ganancia de 40% y el segundo con una ganancia de 60%. La ganancia total de la venta de los dos botes fue 54% y el precio total de la venta de ambos botes fue \$88 704. ¿Cuánto pagó Harold originalmente por cada uno de los botes?

Solución

Solución 1

Denotemos con a lo que Harold pagó por el primer bote, en dólares, y denotemos con b lo que pagó por el segundo bote, en dólares.

La ganancia de la venta del primer bote fue del 40%, es decir $0.4a$ dólares. Entonces, el primer bote se vendió en $a + 0.4a = 1.4a$ dólares. La ganancia de la venta del segundo bote fue del 60%, es decir $0.6b$ dólares. Entonces, el segundo bote se vendió en $b + 0.6b = 1.6b$ dólares. El precio total de la venta de los botes fue \$88 704, así que tenemos

$$1.4a + 1.6b = 88\,704 \tag{1}$$

Harold compró ambos botes por un total de $(a + b)$ dólares. La ganancia de la venta de ambos botes fue 54%, es decir $0.54(a + b)$ dólares. Los dos botes se vendieron en $(a + b) + 0.54(a + b) = 1.54(a + b)$ dólares. Pero el precio total de la venta fue de \$88 704, entonces

$$\begin{aligned} 1.54(a+b) &= 88\,704 \\ a + b &= 88\,704 \div 1.54 \\ a + b &= 57\,600 \\ a &= 57\,600 - b \end{aligned}$$

Sustituyendo $a = 57\,600 - b$ en la ecuación (1) nos da

$$\begin{aligned} 1.4(57\,600 - b) + 1.6b &= 88\,704 \\ 80\,640 - 1.4b + 1.6b &= 88\,704 \\ 0.2b &= 8064 \end{aligned}$$

Dividiendo entre 0.2, obtenemos $b = 40\,320$. Como $b = 40\,320$ y $a + b = 57\,600$, obtenemos que $a = 17\,280$.

Por lo tanto, Harold pagó \$17 280 por el primer bote y \$40 320 por el segundo.

Solución 2

Denotemos con a lo que Harold pagó por el primer bote, en dólares, y denotemos con b lo que pagó por el segundo bote, en dólares.

La ganancia de la venta del primer bote fue 40%, es decir $0.4a$ dólares. El primer bote se vendió en $a + 0.4a = 1.4a$ dólares. La ganancia de la venta del segundo bote fue 60%, es decir $0.6b$ dólares. El segundo bote se vendió en $b + 0.6b = 1.6b$ dólares. El precio total de la venta de los botes fue \$88 704, así que tenemos

$$1.4a + 1.6b = 88\,704$$

Multiplicando por 5, obtenemos

$$7a + 8b = 443\,520 \tag{1}$$

Harold compró ambos botes por un total de $(a + b)$ dólares. La ganancia de la venta de ambos botes fue 54%, es decir $0.54(a + b)$ dólares. La ganancia total es la suma de las ganancias en la venta de cada bote, entonces

$$\begin{aligned} 0.54(a+b) &= 0.4a + 0.6b \\ 0.54a + 0.54b &= 0.4a + 0.6b \\ 0.14a &= 0.06b \end{aligned}$$

Multiplicando por 50, obtenemos

$$7a = 3b \tag{2}$$

Sustituyendo $3b$ en lugar de $7a$ en la ecuación (1), obtenemos $3b + 8b = 443\,520$, es decir $11b = 443\,520$ y entonces $b = 40\,320$.

Sustituyendo $b = 40\,320$ en la ecuación (2), obtenemos $7a = 120\,960$ y entonces $a = 17\,280$.

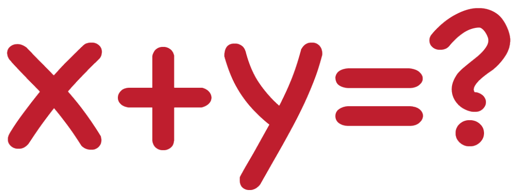
Por lo tanto, Harold pagó \$17 280 por el primer bote y \$40 320 por el segundo bote.

Problema de la Semana

Problema D

Dos Ecuaciones y Dos Variables

Si sabemos que $2x = 3y + 11$ y que $2^x = 2^{4(y+1)}$, determina el valor de $x + y$.



Problema de la Semana

Problema D y Solución

Dos Ecuaciones y Dos Variables

Problema

Si sabemos que $2x = 3y + 11$ y que $2^x = 2^{4(y+1)}$, determina el valor de $x + y$.

Solución

Solución 1

Como $2^x = 2^{4(y+1)}$, se sigue que $x = 4(y + 1)$, es decir $x = 4y + 4$. Ahora tenemos las siguientes dos ecuaciones.

$$2x = 3y + 11 \tag{1}$$
$$x = 4y + 4 \tag{2}$$

Podemos sustituir en la ecuación (1) el valor de x de la ecuación (2).

$$\begin{aligned} 2x &= 3y + 11 \\ 2(4y + 4) &= 3y + 11 \\ 8y + 8 &= 3y + 11 \\ 5y &= 3 \\ y &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Ahora, podemos sustituir $y = \frac{3}{5}$ en la ecuación (2) para despejar x.

$$\begin{aligned} x &= 4y + 4 \\ &= 4\left(\frac{3}{5}\right) + 4 \\ &= \frac{12}{5} + \frac{20}{5} \\ &= \frac{32}{5} \end{aligned}$$

Ahora que tenemos los valores de x y de y, podemos determinar el valor de $x + y$.

$$x + y = \frac{32}{5} + \frac{3}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

Por lo tanto, el valor de $x + y$ es 7.

Solución 2

Podemos resolver este problema de forma más rápida sin necesidad de encontrar los valores de x y de y. Como $2^x = 2^{4(y+1)}$, se sigue que $x = 4(y + 1)$, es decir $x = 4y + 4$. Ahora tenemos las siguientes dos ecuaciones.

$$2x = 3y + 11 \tag{1}$$
$$x = 4y + 4 \tag{2}$$

Podemos restar la ecuación (2) de la eacuación (1), y obtenemos que $x = -y + 7$.

Reacomodando la ecuación obtenemos $x + y = 7$. Por lo tanto, el valor de $x + y$ es 7.

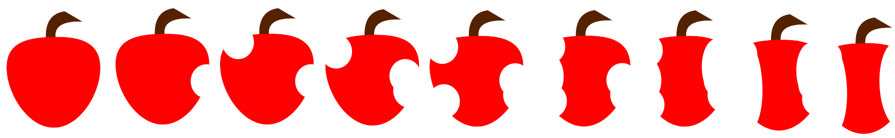
Problema de la Semana

Problema D

Sigue la Sucesión

Los primeros cuatro términos de una sucesión aritmética son x, $2x$, y y $x - y - 6$, para algunos enteros x y y. ¿Cuál es el valor del término número 50 de esta sucesión?

Nota: Una *sucesión aritmética* es una sucesión en la que cada término después del primero, se obtiene al sumar una constante al término anterior. Por ejemplo, $3, 5, 7, 9$ son los primeros términos de una sucesión aritmética.



Problema de la Semana
Problema D y Solución
Sigue la Sucesión

Problema

Los primeros cuatro términos de una sucesión aritmética son x, $2x$, y y $x - y - 6$, para algunos enteros x y y. ¿Cuál es el valor del término número 50 de esta sucesión?

NOTA: Una *sucesión aritmética* es una sucesión en la que cada término después del primero, se obtiene al sumar una constante al término anterior. Por ejemplo, $3, 5, 7, 9$ son los primeros términos de una sucesión aritmética.

Solución

Como cada término se obtiene de sumar la misma constante al término anterior, entonces las diferencias entre parejas de términos consecutivos son iguales. Así que de los primeros tres términos podemos concluir

$$\begin{aligned} 2x - x &= y - 2x \\ x &= y - 2x \\ 3x &= y \end{aligned}$$

Ahora, podemos sustituir $y = 3x$ en el cuarto término para escribirlo en términos de x.

$$\begin{aligned} x - y - 6 &= x - 3x - 6 \\ &= -2x - 6 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en términos de x, los primeros cuatro términos son x, $2x$, $3x$ y $-2x - 6$. Sin embargo, como $2x - x = x$, la diferencia común es x, así que también podemos escribir el cuarto término como $4x$. Entonces,

$$\begin{aligned} 4x &= -2x - 6 \\ 6x &= -6 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los primeros cuatro términos de la sucesión son -1, -2, -3 y -4.

Para obtener el término número 50 debemos sumarle la diferencia común 49 veces al primer término, así obtenemos $-1 + 49(-1) = -50$.

Por lo tanto, el término número 50 de la sucesión es -50.

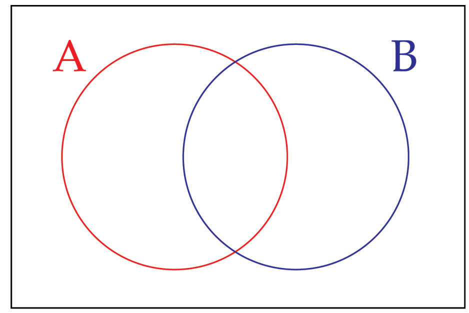
Problema de la Semana

Problema D

Todo en su Lugar 2

(a) Un diagrama de Venn tiene dos círculos, A y B. Cada círculo contiene parejas ordenadas (x, y) tales que x y y son números reales que satisfacen las siguientes condiciones.

A: $y = -x + 1$
B: $y = 3x + 5$

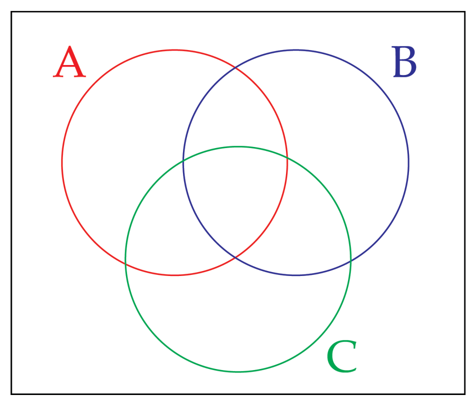


La región donde se sobreponen los círculos contiene parejas ordenadas que están tanto en A como en B, mientras que la región afuera de ambos círculos contiene parejas ordenadas que no están ni en A ni en B.

En total este diagrama de Venn tiene cuatro regiones. Acomoda parejas ordenadas en tantas regiones como puedas. ¿Es posible encontrar una pareja para cada región?

(b) Un diagrama de Venn tiene tres círculos, A, B y C. Cada círculo contiene enteros n que satisfacen lo siguiente.

A: $3n < 20$
B: $n + 9 > 6$
C: n es par



En total este diagrama de Venn tiene ocho regiones. Acomoda enteros en tantas regiones como puedas. ¿Es posible encontrar un entero para cada región?

Problema de la Semana

Problema D y Solución

Todo en su Lugar 2

Problema

(a) Un diagrama de Venn tiene dos círculos, A y B. Cada círculo contiene parejas ordenadas (x, y) tales que x y y son números reales que satisfacen las siguientes condiciones.

A: $y = -x + 1$

B: $y = 3x + 5$

La región donde se traslapan los círculos contiene parejas ordenadas que están tanto en A como en B, mientras que la región afuera de ambos círculos contiene parejas ordenadas que no están ni en A ni en B. En total este diagrama de Venn tiene cuatro regiones. Acomoda parejas ordenadas en tantas regiones como puedas. ¿Es posible encontrar una pareja para cada región?

(b) Un diagrama de Venn tiene tres círculos, A, B y C. Cada círculo contiene enteros n que satisfacen lo siguiente.

A: $3n < 20$

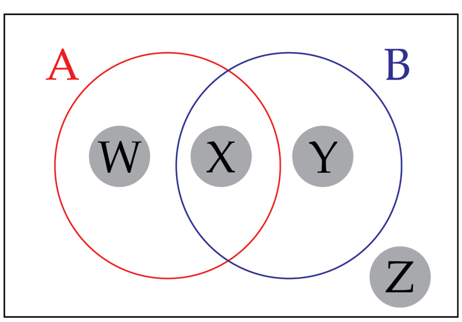
B: $n + 9 > 6$

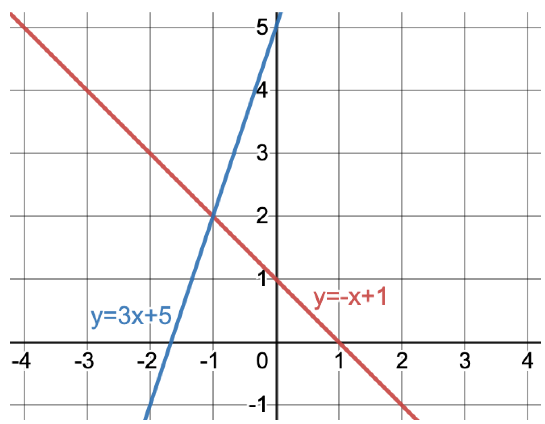
C: n es par

En total este diagrama de Venn tiene ocho regiones. Acomoda enteros en tantas regiones como puedas. ¿Es posible encontrar un entero para cada región?

Solución

(a) Llamamos W, X, Y, y Z a las regiones. Como referencia, graficamos las ecuaciones en una cuadrícula .





- Las parejas ordenadas (x, y) en la región W deben satisfacer $y = -x + 1$, pero *no* $y = 3x + 5$. Cualquier punto en la línea $y = -x + 1$ que *no* está en la línea $y = 3x + 5$ satisface esto. Un ejemplo es $(0, 1)$.
- Las parejas ordenadas (x, y) en la región X deben satisfacer tanto $y = -x + 1$ como $y = 3x + 5$. El único punto que satisface esto es el punto de intersección, $(-1, 2)$.
- Las parejas ordenadas (x, y) en la región Y deben satisfacer $y = 3x + 5$, pero *no* $y = -x + 1$. Cualquier punto en la línea $y = 3x + 5$ que *no* está en la línea $y = -x + 1$ satisface esto. Un ejemplo es $(0, 5)$.

- Las parejas ordenadas (x, y) en la región Z *no* deben satisfacer $y = 3x + 5$ ni $y = -x + 1$. Cualquier punto que no esté en ninguna de las líneas satisface esto. Un ejemplo es $(2, 2)$.

(b) Hemos llamado a las ocho regiones S, T, U, V, W, X, Y, y Z. Es útil si primero resolvemos las desigualdades.

Para A:

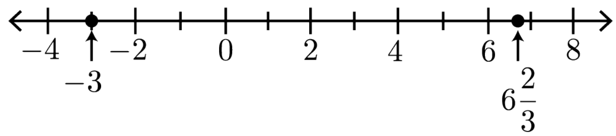
$$3n < 20$$

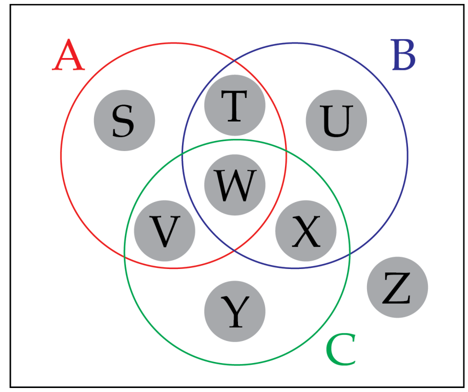
$$n < \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$$

Para B:

$$n + 9 > 6$$

$$n > -3$$





- Cualquier entero en la región S debe ser menor que $6\frac{2}{3}$, menor o igual que -3 y un número impar. Cualquier número impar menor o igual que -3 satisface esto. Un ejemplo es -5.
- Cualquier entero en la región T debe ser menor que $6\frac{2}{3}$, mayor que -3 y un número impar. Los únicos enteros que satisfacen esto son $-1, 1, 3$, y 5.
- Cualquier entero en la región U debe ser mayor o igual que $6\frac{2}{3}$, mayor que -3 y un número impar. Cualquier número impar mayor o igual que $6\frac{2}{3}$ satisface esto. Un ejemplo es 7.
- Cualquier entero en la región V debe ser menor que $6\frac{2}{3}$, menor o igual que -3 y un número par. Cualquier número par menor o igual que -3 satisface esto. Un ejemplo es -4.
- Cualquier entero en la región W debe ser menor que $6\frac{2}{3}$, mayor que -3 y un número par. Los únicos enteros que satisfacen esto son $-2, 0, 2, 4$, y 6.
- Cualquier entero en la región X debe ser mayor o igual que $6\frac{2}{3}$, mayor que -3 y un número par. Cualquier número par mayor o igual que $6\frac{2}{3}$ satisface esto. Un ejemplo es 8.
- Cualquier entero en la región Y debe ser mayor o igual que $6\frac{2}{3}$, menor o igual que -3 y un número par. Ningún entero satisface estas tres condiciones, así que esta región se queda vacía.
- Cualquier entero en la región Z debe ser mayor o igual que $6\frac{2}{3}$, menor o igual que -3 y un número impar. Ningún entero satisface estas tres condiciones, así que esta región también se queda vacía.

Problema de la Semana

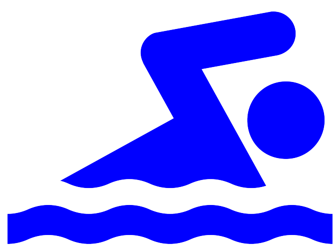
Problema D

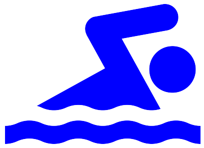
¡Vamos a Nadar!

En la familia de Wei hay cuatro niños y tres adultos. Cada fin de semana, van a nadar juntos. Para usar la piscina pública, cada persona necesita un boleto.

Los padres de Wei compran varios boletos y los guardan en una caja. Al inicio del año, la proporción de boletos para adulto a boletos para niño en la caja era de $11 : 14$.

La familia de Wei usó boletos cada fin de semana para ir a nadar hasta que ya no tuvieron boletos para todos los miembros de la familia. En ese momento, ya no quedaban boletos para niño y quedaban 3 boletos para adulto en la caja. ¿Cuántos boletos había en la caja al inicio del año?





Problema de la Semana

Problema D y Solución

¡Vamos a Nadar!

Problema

En la familia de Wei hay cuatro niños y tres adultos. Cada fin de semana, van a nadar juntos. Para usar la piscina pública, cada persona necesita un boleto.

Los padres de Wei compran varios boletos y los guardan en una caja. Al inicio del año, la proporción de boletos para adulto a boletos para niño en la caja era de $11 : 14$.

La familia de Wei usó boletos cada fin de semana para ir a nadar hasta que ya no tuvieron boletos para todos los miembros de la familia. En ese momento, ya no quedaban boletos para niño y quedaban 3 boletos para adulto en la caja. ¿Cuántos boletos había en la caja al inicio del año?

Solución

Sea n el número de veces que la familia de Wei usó boletos para ir a nadar. Como usaron 4 boletos para niño y 3 boletos para adulto en cada visita, entonces usaron $4n$ boletos para niño y $3n$ boletos para adulto en total. Después de haber usado todos los boletos para niño, quedaban 3 boletos para adulto en la caja. Esto quiere decir que había $3n + 3$ boletos para adulto y $4n$ boletos para niño al inicio de año.

La proporción de boletos para adulto a boletos para niño a principio de año era de $11 : 14$. Podemos usar esto para escribir y resolver la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned}
\frac{11}{14} &= \frac{3n+3}{4n} \\
(11)(4n) &= (14)(3n+3) \\
44n &= 42n + 42 \\
2n &= 42 \\
n &= 21
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la familia de Wei usó los boletos para ir a nadar 21 veces.

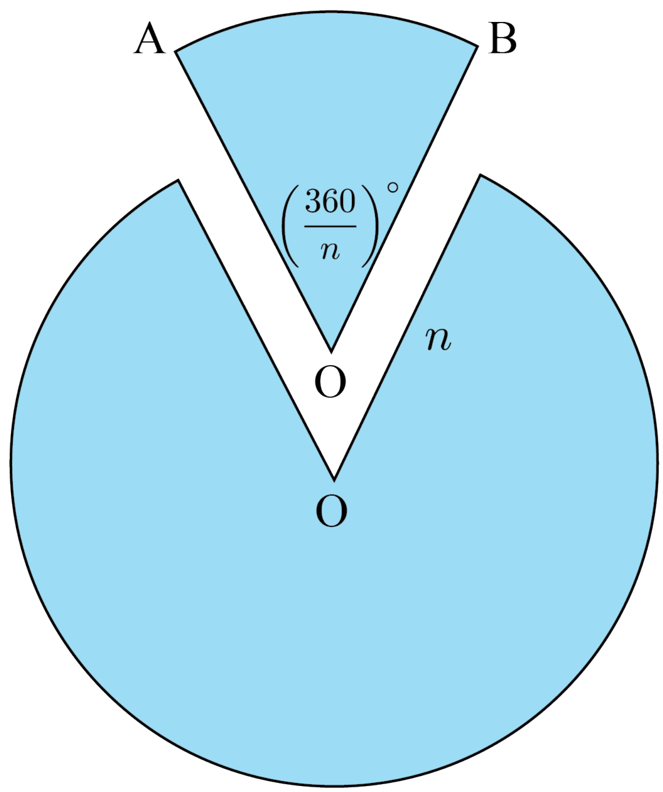
La cantidad total de boletos en la caja al inicio del año era de $4n + 3n + 3 = 7n + 3$. Como $n = 21$, la cantidad total de boletos era $7(21) + 3 = 150$.

Problema de la Semana

Problema D

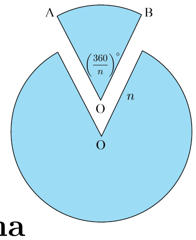
Una Rebanada a la Vez

Los puntos A y B están en un círculo con centro O y radio n de forma que $\angle AOB = \left(\frac{360}{n}\right)^\circ$. El sector AOB se separa del círculo.



Determina todos los enteros positivos n para los cuales el perímetro del sector AOB es mayor a 20 y menor a 30.

NOTA: Te puede ser útil el hecho de que la razón entre la longitud de un arco y longitud la circunferencia es la misma que la razón entre el ángulo del sector y 360°. De hecho, obtenemos la misma razón si comparamos el área del sector con el área total del círculo.



Problema de la Semana

Problema D y Solución

Una Rebanada a la Vez

Problema

Los puntos A y B están en un círculo con centro O y radio n de forma que $\angle AOB = \left(\frac{360}{n}\right)^{\circ}$. El sector AOB se separa del círculo. Determina todos los enteros positivos n para los cuales el perímetro del sector AOB es mayor a 20 y menor a 30.

Nota: Te puede ser útil el hecho de que la razón entre la longitud de un arco y longitud la circunferencia es la misma que la razón entre el ángulo del sector y 360°. De hecho, obtenemos la misma razón si comparamos el área del sector con el área total del círculo.

Solución

En general, si el ángulo del sector crece y el radio de se queda igual, entonces la longitud del arco también crece. Pero en este problema, cuando el radio n crece, el sector del ángulo $\left(\frac{360}{n}\right)^{\circ}$ decrece. Por lo que es difícil "ver" qué pasa con la longitud del arco.

Sabemos que la razón entre la longitud del arco y la circunferencia es la misma que la razón entre ángulo del sector y 360°. Es decir,

$$\frac{\text{longitud del arco } AB}{\text{circunferencia}} = \frac{\text{ángulo del sector } AOB}{360^{\circ}}$$

Reacomodando, obtenemos

$$\text{longitud del arco } AB = \frac{\text{ángulo del sector } AOB}{360^{\circ}} \times \text{circunferencia}$$

Como $d = 2n$, sabemos que: circunferencia $= \pi d = \pi \times 2n$. Entonces,

$$\text{longitud del arco } AB = \frac{\frac{360}{n}}{360} \times \pi \times 2n = 2\pi$$

Ahora podemos usar la longitud de arco para calcular el perímetro de AOB.

$$\begin{aligned}\text{perímetro de } AOB &= AO + OB + \text{longitud del arco } AB \\ &= n + n + 2\pi \\ &= 2n + 2\pi\end{aligned}$$

Si el perímetro es mayor a 20, entonces

$$\begin{aligned}2n + 2\pi &> 20 \\ n + \pi &> 10 \\ n &> 10 - \pi \approx 6.9\end{aligned}$$

Si el perímetro es menor a 30, entonces

$$\begin{aligned}2n + 2\pi &< 30 \\ n + \pi &< 15 \\ n &< 15 - \pi \approx 11.9\end{aligned}$$

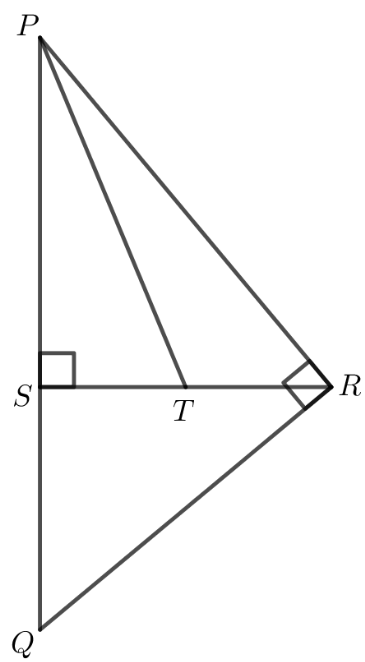
Queremos valores enteros de n tales que $n > 6.9$ y $n < 11.9$. Los únicos valores enteros de n que satisfacen estas condiciones son $n = 7$, $n = 8$, $n = 9$, $n = 10$ y $n = 11$.

Problema de la Semana

Problema D

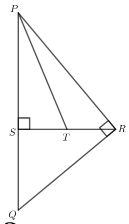
¿Cuál es el Término?

$\triangle PQR$ es un triángulo rectángulo con $\angle PRQ = 90°$. S es el punto en la recta PQ tal que SR es altura de $\triangle PQR$. T es el punto en la recta SR tal que PT es mediana de $\triangle PSR$.



Si la longitud de la mediana PT es 39 y la longitud de PS es 36, determine cuánto mide QS.

Nota: la *altura* de un triángulo es un segmento trazado desde un vértice del triángulo y que es perpendicular al lado opuesto. La *mediana* es un segmento trazado desde un vértice del triángulo al punto medio del lado opuesto.



Problema de la Semana

Problema D y Solución

¿Cuál es el Término?

Problema

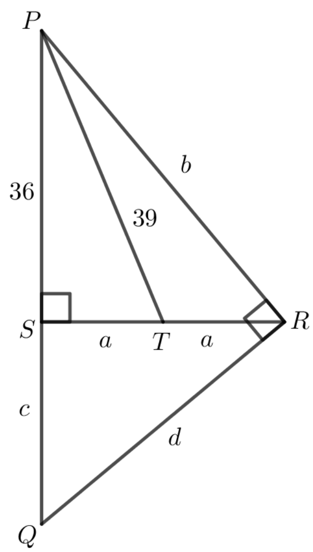
$\triangle PQR$ es un triángulo rectángulo con $\angle PRQ = 90°$. S es el punto en la recta PQ tal que SR es altura de $\triangle PQR$. T es el punto en la recta SR tal que PT es mediana de $\triangle PSR$.

Si la longitud de la mediana PT es 39 y la longitud de PS es 36, determine cuánto mide QS.

NOTA: la *altura* de un triángulo es un segmento trazado desde un vértice del triángulo y que es perpendicular al lado opuesto. La *mediana* es un segmento trazado desde un vértice del triángulo al punto medio del lado opuesto.

Solución

Como T es mediana en $\triangle PSR$, $ST = TR$. Sea $ST = TR = a$ y sean $PR = b$, $QS = c$ y $QR = d$. En el siguiente diagrama se muestran las variables y la información proporcionada $PS = 36$ y $PT = 39$.



Como $\triangle PST$ tiene un ángulo recto en S,

$$\begin{aligned} ST^2 &= PT^2 - PS^2 \\ a^2 &= 39^2 - 36^2 \\ &= 225 \end{aligned}$$

Entonces, como $a > 0$, obtenemos que $a = 15$. Por lo tanto, $SR = 2a = 30$.

Como $\triangle PSR$ tiene un ángulo recto en S,

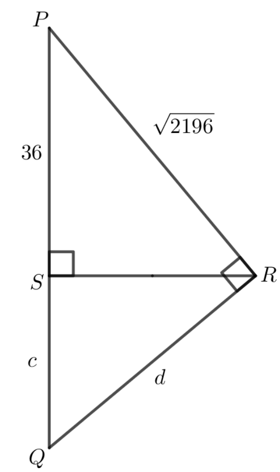
$$\begin{aligned} PR^2 &= PS^2 + SR^2 \\ b^2 &= 36^2 + 30^2 \\ &= 2196 \end{aligned}$$

Entonces, como $b > 0$, se sigue que $b = \sqrt{2196}$.

Ahora usaremos $a = 15$ y $b = \sqrt{2196}$ en las siguientes tres soluciones.

Solución 1

En $\triangle PSR$ y $\triangle PRQ$, tenemos dos ángulos comunes $\angle PSR = \angle PRQ = 90^\circ$ y $\angle SPR = \angle QPR$. Por lo tanto, $\triangle PSR$ es semejante a $\triangle PRQ$. Se sigue que



$$\begin{aligned} \frac{PS}{PR} &= \frac{PR}{PQ} \\ \frac{36}{\sqrt{2196}} &= \frac{\sqrt{2196}}{36+c} \\ 1296 + 36c &= 2196 \\ 36c &= 900 \\ c &= 25 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la longitud de QS es 25.

Solución 2

Como $\triangle RSQ$ tiene un ángulo recto en S, $QR^2 = QS^2 + SR^2 = c^2 + 30^2 = c^2 + 900$.
Por lo tanto, $d^2 = c^2 + 900$.

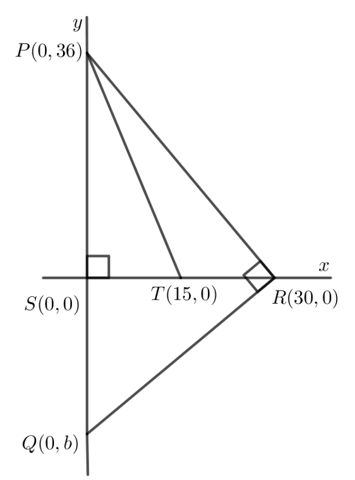
Como $\triangle PQR$ tiene un ángulo recto en R, $PQ^2 = PR^2 + QR^2$. Entonces,
$(36 + c)^2 = (\sqrt{2196})^2 + d^2$, y simplificando obtenemos $1296 + 72c + c^2 = 2196 + d^2$. Esto se reduce a $c^2 + 72c = 900 + d^2$.

Sustituyendo $d^2 = c^2 + 900$, obtenemos $c^2 + 72c = 900 + c^2 + 900$. Simplificando, obtenemos $72c = 1800$ y concluimos que $c = 25$.

Por lo tanto, la longitud de QS es 25.

Solución 3

Podemos trazar $\triangle PQR$ en el plano cartesiano de forma que PQ esté sobre el eje y, y la altura SR esté sobre la parte positiva del eje x, con S en el origen. Entonces P tiene coordenadas $(0, 36)$, T tiene coordenadas $(15, 0)$, y R tiene coordenadas $(30, 0)$.
Como Q está sobre el eje y, denotamos las coordenadas de Q por $(0, b)$ con $b < 0$.
Observa que



$$\text{pendiente } PR = \frac{36-0}{0-30} = \frac{-6}{5} \text{ y pendiente } QR = \frac{b-0}{0-30} = \frac{b}{-30}$$

Como $\angle PRQ = 90^\circ$, $PR \perp QR$, y entonces la pendiente de una es el recíproco negativo de la otra. Es decir, $\dfrac{b}{-30} = \dfrac{5}{6}$, y entonces $b = -25$.

Se sigue que las coordenadas de Q son $(0, -25)$. Por lo tanto, la longitud de QS es 25.

Problema de la Semana

Problema D

Disfracción

Encuentra todas las parejas ordenadas, (a, b), que satisfacen $\dfrac{a-b}{a+b} = 9$ y $\dfrac{ab}{a+b} = -60$.

$$(a, b)$$

(a, b)

Problema de la Semana
Problema D y Solución
Disfracción

Problema

Encuentra todas las parejas ordenadas, (a, b), que satisfacen $\dfrac{a-b}{a+b} = 9$ y $\dfrac{ab}{a+b} = -60$.

Solución

Si en la primera ecuación, $\dfrac{a-b}{a+b} = 9$, multiplicamos ambos lados por $a+b$, obtenemos $a - b = 9a + 9b$ y entonces $-8a = 10b$ o $-4a = 5b$. Entonces, $a = -\dfrac{5}{4}b$.

Si en la segunda ecuación, $\dfrac{ab}{a+b} = -60$, multiplicamos ambos lados por $a+b$, obtenemos $ab = -60a - 60b$. Sustituyendo $a = -\dfrac{5}{4}b$ en $ab = -60a - 60b$ obtenemos

$$\begin{aligned}
ab &= -60a - 60b \\
\left(-\frac{5}{4}b\right)(b) &= -60\left(-\frac{5}{4}b\right) - 60b \\
-\frac{5}{4}b^2 &= 75b - 60b \\
-\frac{5}{4}b^2 &= 15b \\
b^2 &= -12b \\
b^2 + 12b &= 0
\end{aligned}$$

Observa que $b = 0$ satisface la ecuación. Entonces $b = 0$ es una opción. Para $b \neq 0$, podemos dividir ambos lados de la ecuación entre b para obtener $b + 12 = 0$, o $b = -12$. Entonces, $b = 0$ o $b = -12$.

Si $b = 0$, entonces $a = -\dfrac{5}{4}(0) = 0$. Pero esto nos da un denominador de 0 en cada una de las ecuaciones originales. Por lo tanto, $b \neq 0$.

Si $b = -12$, entonces $a = -\dfrac{5}{4}(-12) = 15$.

Por lo tanto, la única pareja ordenada que satisface la ecuación es $(15, -12)$.

Manejo de Datos (D)

VOLVER
A LA
PORTADA

Problema de la Semana

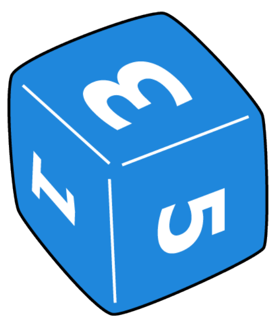
Problema D

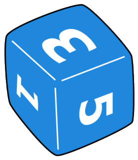
No Tan Aleatorio

Ana creó un dado digital que se puede controlar con un programa. Lo programó de la siguiente forma:

- Inicialmente tiene los números 1, 2, 3, 4, 6, y 8 en sus caras.
- Si al lanzarlo obtenemos un número impar, todos los números impares del dado se duplican, pero los pares se quedan igual.
- Si al lanzarlo obtenemos un número par, todos los números pares se dividen a la mitad, y los números impares se quedan igual.

Ana lanza el dado una vez y los números en el dado se cambian como se describe arriba. Luego lo vuelve a lanzar, pero algo sale mal, y ninguno de los números cambia. ¿Cuál es la probabilidad de que haya lanzado un 2 en su segundo tiro?





Problema de la Semana

Problema D y Solución

No Tan Aleatorio

Problema

Ana creó un dado digital que se puede controlar con un programa. Lo programó de la siguiente forma:

- Inicialmente tiene los números $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,$ y 8 en sus caras.
- Si al lanzarlo obtenemos un número impar, todos los números impares del dado se duplican, pero los pares se quedan igual.
- Si al lanzarlo obtenemos un número par, todos los números pares se dividen a la mitad, y los números impares se quedan igual.

Ana lanza el dado una vez y los números en el dado se cambian como se describe arriba. Luego lo vuelve a lanzar, pero algo sale mal, y ninguno de los números cambia. ¿Cuál es la probabilidad de que haya lanzado un 2 en su segundo tiro?

Solución

Solución 1

En esta solución, calcularemos todos los casos para el primer y segundo tiro para contar la cantidad total de posibles resultados. Luego contaremos la cantidad de resultados en los que el segundo dado es un 2 y determinaremos la probabilidad.

- Si el primer lanzamiento es impar, duplicamos los números impares y entonces los números del dado cambian de $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8$ a $2,\ 2,\ 6,\ 4,\ 6,\ 8$. Si escribimos en una pareja ordenada, el primer y segundo tiro, obtenemos las siguientes 12 combinaciones posibles.

$$(1,2),(1,2),(1,6),(1,4),(1,6),(1,8),(3,2),(3,2),(3,6),(3,4),(3,6),(3,8)$$

- Si el primer lanzamiento es par, dividimos los números pares a la mitad y entonces los números del dado cambian de $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8$ a $1,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 4$. Si escribimos en una pareja ordenada, el primer y segundo tiro, obtenemos las siguientes 24 combinaciones posibles.

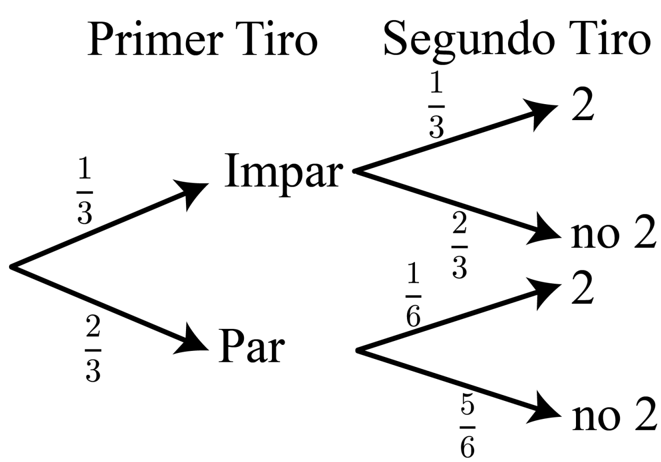
$$(2,1),(2,1),(2,3),(2,2),(2,3),(2,4),(4,1),(4,1),(4,3),(4,2),(4,3),(4,4),$$
$$(6,1),(6,1),(6,3),(6,2),(6,3),(6,4),(8,1),(8,1),(8,3),(8,2),(8,3),(8,4)$$

En total hay 36 possibles resultados. En 8 de ellos el segundo tiro fue 2. Por lo tanto, la probabilidad de obtener un 2 en el segundo tiro es $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$.

Solución 2

En esta solución, mostraremos las posibilidades en un diagrama de árbol.

- La probabilidad de obtener un número impar en el primer tiro es $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. En ese caso, duplicamos los números impares, y entonces los números del dado cambian de $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8$ a $2,\ 2,\ 6,\ 4,\ 6,\ 8$. La probabilidad de obtener un 2 en el segundo tiro es $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
- La probabilidad de obtener un número par en el primer tiro es $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. En ese caso, dividimos los números pares a la mitad y entonces los números del dado cambian de $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8$ a $1,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 4$. La probabilidad de obtener un 2 en el segundo tiro es $\frac{1}{6}$.



Para calcular la probabilidad de lanzar un número impar en el primer tiro, y luego un 2 en el segundo tiro, multiplicamos las probabilidades de cada caso y obtenemos $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

Para calcular la probabilidad de lanzar un número par en el primer tiro, y luego un 2 en el segundo tiro, multiplicamos las probabilidades de cada caso y obtenemos $\frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$.

Luego, para calcular la probabilidad de lanzar un número impar en el primer tiro, y luego un 2 en el segundo tiro, o lanzar un número par en el primer tiro, y luego un 2 en el segundo tiro, sumamos ambas probabilidades $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$.

Por lo tanto, la probabilidad de lanzar un 2 en el segundo tiro es $\frac{2}{9}$.

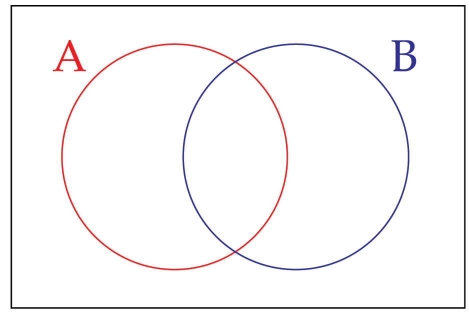
Problema de la Semana

Problema D

Todo en su Lugar 2

(a) Un diagrama de Venn tiene dos círculos, A y B. Cada círculo contiene parejas ordenadas (x, y) tales que x y y son números reales que satisfacen las siguientes condiciones.

A: $y = -x + 1$
B: $y = 3x + 5$

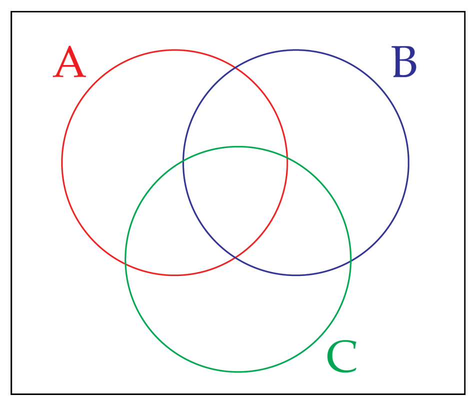


La región donde se sobreponen los círculos contiene parejas ordenadas que están tanto en A como en B, mientras que la región afuera de ambos círculos contiene parejas ordenadas que no están ni en A ni en B.

En total este diagrama de Venn tiene cuatro regiones. Acomoda parejas ordenadas en tantas regiones como puedas. ¿Es posible encontrar una pareja para cada región?

(b) Un diagrama de Venn tiene tres círculos, A, B y C. Cada círculo contiene enteros n que satisfacen lo siguiente.

A: $3n < 20$
B: $n + 9 > 6$
C: n es par



En total este diagrama de Venn tiene ocho regiones. Acomoda enteros en tantas regiones como puedas. ¿Es posible encontrar un entero para cada región?

Problema de la Semana

Problema D y Solución

Todo en su Lugar 2

Problema

(a) Un diagrama de Venn tiene dos círculos, A y B. Cada círculo contiene parejas ordenadas (x, y) tales que x y y son números reales que satisfacen las siguientes condiciones.

A: $y = -x + 1$

B: $y = 3x + 5$

La región donde se traslapan los círculos contiene parejas ordenadas que están tanto en A como en B, mientras que la región afuera de ambos círculos contiene parejas ordenadas que no están ni en A ni en B. En total este diagrama de Venn tiene cuatro regiones. Acomoda parejas ordenadas en tantas regiones como puedas. ¿Es posible encontrar una pareja para cada región?

(b) Un diagrama de Venn tiene tres círculos, A, B y C. Cada círculo contiene enteros n que satisfacen lo siguiente.

A: $3n < 20$

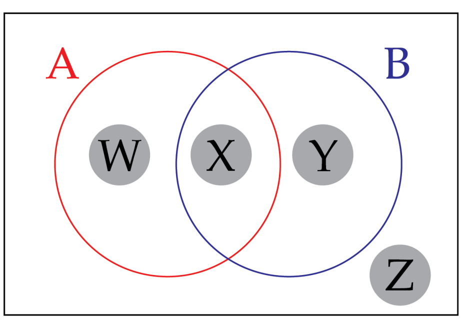
B: $n + 9 > 6$

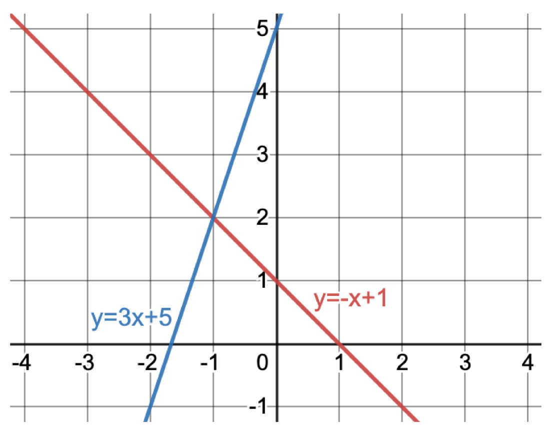
C: n es par

En total este diagrama de Venn tiene ocho regiones. Acomoda enteros en tantas regiones como puedas. ¿Es posible encontrar un entero para cada región?

Solución

(a) Llamamos W, X, Y, y Z a las regiones. Como referencia, graficamos las ecuaciones en una cuadrícula .

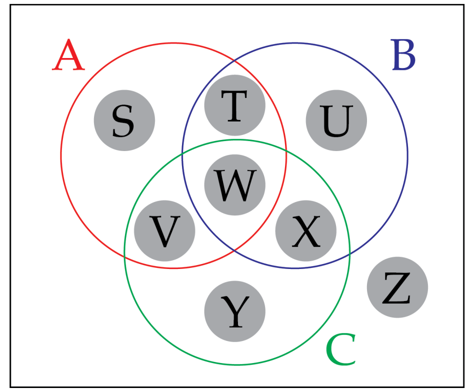




- Las parejas ordenadas (x, y) en la región W deben satisfacer $y = -x + 1$, pero *no* $y = 3x + 5$. Cualquier punto en la línea $y = -x + 1$ que *no* está en la línea $y = 3x + 5$ satisface esto. Un ejemplo es $(0, 1)$.
- Las parejas ordenadas (x, y) en la región X deben satisfacer tanto $y = -x + 1$ como $y = 3x + 5$. El único punto que satisface esto es el punto de intersección, $(-1, 2)$.
- Las parejas ordenadas (x, y) en la región Y deben satisfacer $y = 3x + 5$, pero *no* $y = -x + 1$. Cualquier punto en la línea $y = 3x + 5$ que *no* está en la línea $y = -x + 1$ satisface esto. Un ejemplo es $(0, 5)$.

- Las parejas ordenadas (x, y) en la región Z *no* deben satisfacer $y = 3x + 5$ ni $y = -x + 1$. Cualquier punto que no esté en ninguna de las líneas satisface esto. Un ejemplo es $(2, 2)$.

(b) Hemos llamado a las ocho regiones S, T, U, V, W, X, Y, y Z. Es útil si primero resolvemos las desigualdades.



Para A:

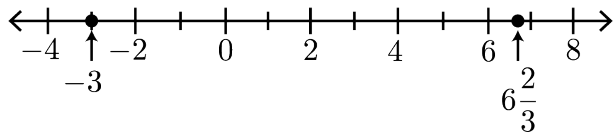
$$3n < 20$$

$$n < \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$$

Para B:

$$n + 9 > 6$$

$$n > -3$$



- Cualquier entero en la región S debe ser menor que $6\frac{2}{3}$, menor o igual que -3 y un número impar. Cualquier número impar menor o igual que -3 satisface esto. Un ejemplo es -5.
- Cualquier entero en la región T debe ser menor que $6\frac{2}{3}$, mayor que -3 y un número impar. Los únicos enteros que satisfacen esto son $-1, 1, 3$, y 5.
- Cualquier entero en la región U debe ser mayor o igual que $6\frac{2}{3}$, mayor que -3 y un número impar. Cualquier número impar mayor o igual que $6\frac{2}{3}$ satisface esto. Un ejemplo es 7.
- Cualquier entero en la región V debe ser menor que $6\frac{2}{3}$, menor o igual que -3 y un número par. Cualquier número par menor o igual que -3 satisface esto. Un ejemplo es -4.
- Cualquier entero en la región W debe ser menor que $6\frac{2}{3}$, mayor que -3 y un número par. Los únicos enteros que satisfacen esto son $-2, 0, 2, 4$, y 6.
- Cualquier entero en la región X debe ser mayor o igual que $6\frac{2}{3}$, mayor que -3 y un número par. Cualquier número par mayor o igual que $6\frac{2}{3}$ satisface esto. Un ejemplo es 8.
- Cualquier entero en la región Y debe ser mayor o igual que $6\frac{2}{3}$, menor o igual que -3 y un número par. Ningún entero satisface estas tres condiciones, así que esta región se queda vacía.
- Cualquier entero en la región Z debe ser mayor o igual que $6\frac{2}{3}$, menor o igual que -3 y un número impar. Ningún entero satisface estas tres condiciones, así que esta región también se queda vacía.

Pensamiento Computacional (C)

VOLVER A LA PORTADA

Problema de la Semana

Problema D

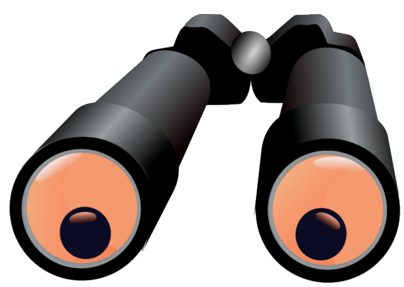
Espías

Un grupo de cinco espías, Agente A, Agente B, Agente C, Agente D y Agente E, se reúnen todos los viernes para compartir toda la información que descubrieron esa semana. Para evitar sospechas, un espía no puede ser visto con más de otro espía a la vez. Además, los espías siempre se comunican cara a cara para no dejar evidencia.

Cada viernes, los espías hacen varias rondas de reuniones en diferentes zonas de la ciudad. Cada ronda consiste en dos reuniones simultaneas, que involucran cuatro espías en total. Siempre hay un espía que no se reúne en esa ronda.

En cada reunión, cada espía comunica toda la información que conoce. Esto incluye tanto la información que obtuvieron en la semana como la información que le pasaron otros espías en las reuniones anteriores.

Determina el mínimo número de rondas de reuniones que se requieren, para que cada espía conozca toda la información recopilada durante la semana por cada uno de los otros espías.



Este problema está inspirado en un problema anterior del Beaver Computing Challenge (BCC).

Problema de la Semana

Problema D y Solución

Espías

Problema

Un grupo de cinco espías, Agente A, Agente B, Agente C, Agente D y Agente E, se reúnen todos los viernes para compartir toda la información que descubrieron esa semana. Para evitar sospechas, un espía no puede ser visto con más de otro espía a la vez. Además, los espías siempre se comunican cara a cara para no dejar evidencia.
Cada viernes, los espías hacen varias rondas de reuniones en diferentes zonas de la ciudad. Cada ronda consiste en dos reuniones simultaneas, que involucran cuatro espías en total. Siempre hay un espía que no se reúne en esa ronda.
En cada reunión, cada espía comunica toda la información que conoce. Esto incluye tanto la información que obtuvieron en la semana como la información que le pasaron otros espías en las reuniones anteriores.
Determina el mínimo número de rondas de reuniones que se requieren, para que cada espía conozca toda la información recopilada durante la semana por cada uno de los otros espías.

Este problema está inspirado en un problema anterior del Beaver Computing Challenge (BCC).

Solución

En esta solución, primero mostraremos que se necesitan al menos cuatro rondas para que cada espía consiga toda la información. Luego, mostraremos que es posible hacerlo en exactamente cuatro rondas. Por lo tanto, concluiremos que el mínimo número de rondas necesario es cuatro.

En la primera ronda, hay dos reuniones y un espía se queda fuera. Supongamos que el Agente E es el que se queda fuera. Como el Agente E no estuvo involucrado, la información que recopiló sólo la conoce él. Por lo tanto, no es posible que todos conozcan toda la información después de una sola ronda.

En la segunda ronda, el Agente E puede reunirse con otro espía o quedarse fuera de nuevo.

- Supongamos que el Agente E se reúne con otro espía. Entonces sólo dos espías conocerán la información que recopiló originalmente el Agente E. En la tercera ronda, estos dos espías se pueden reunir con a lo más otros dos espías, así que después de tres rondas, a lo más cuatro espías conoceran la información que recopiló originalmente el Agente E. Por lo tanto, se necesita al menos una ronda más, y entonces al menos se necesitan cuatro rondas en total.
- Supongamos que el Agente E se queda fuera de nuevo. Luego, en la tercera ronda el agente E se puede reunir con otro espía, y sólo dos espías conoceran la información que recopiló originalmente el Agente E. Con el mismo razonamiento que antes, podemos demostrar que en este caso, se necesitarán al menos cinco rondas.

Ya mostramos que se necesitan al menos cuatro rondas si el Agente E se reúne con otro espía en la segunda ronda. Ahora mostraremos que se puede hacer exactamente en cuatro rondas.

En la primera ronda, supongamos que se reúnen los gentes A y B, y también se reúnen los agentes C y D, mientras que E se queda solo.

Podemos resumir la información que tiene cada espía después de la primera ronda en la siguiente tabla.

Agente	Conoce la información de los agentes
A	A, B
B	A, B
C	C, D
D	C, D
E	E

En la segunda ronda, supongamos que el Agente E se reúne con el Agente A, y el agente B se reúne con el Agente C, mientras el Agente D se queda sólo. Ahora el Agente A conoce la información de los agentes B y E, pero no la de C y D. El Agente B conoce la información de lo Agentes A, C y D, pero no la del Agente E.

La información que tiene cada espía después de la segunda ronda es la siguiente .

Agente	Conoce la información de los agentes
A	A, B, E
B	A, B, C, D
C	A, B, C, D
D	C, D
E	A, B, E

En la tercera ronda, el Agente A se reúne con el Agente C, el Agente D se reúne con el Agente E, mientras el Agente B se queda fuera. La información que tiene cada espía después de la tercera ronda es la siguiente.

Agente	Conoce la información de los agentes
A	A, B, C, D, E
B	A, B, C, D
C	A, B, C, D, E
D	A, B, C, D, E
E	A, B, C, D, E

En la cuarta ronda, el Agente B se puede reunir con cualquier otro espía para obtener la información original del Agente E. No es necesaria ninguna otra reunión en esta ronda, ya que todos los demás espías ya conocen toda la información

Demostramos que al menos se necesitan cuatro rondas y también vimos que es posible que todos los espías obtengan toda la información en exactamente cuatro rondas. Por lo tanto, el mínimo número de rondas que se requieren para que cada espía conozca toda la información recopilada durante la semana por cada uno de los otros espías es cuatro.

Extensión:

Supongamos que hay 6 espías en lugar de 5. Determina el mínimo número de rondas de reuniones que se requieren, para que cada espía conozca toda la información recopilada durante la semana por cada uno de los otros espías. Puede que el resultado te sorprenda.

Problema de la Semana

Problema D

Fuera de Este Mundo

En un planeta muy lejano, existen dos tipos de habitantes: Veres, que siempre dicen la verdad, y Nugatores, que siempre mienten.

Cuatro habitantes del planeta están sentados en una mesa circular. Cuando les preguntan, "¿Eres un Vere o un Nugator?", los cuatro responden, "Vere". Cuando les preguntan, "La persona a tu derecha es un Vere o un Nugator?", los cuatro responden, "Nugator".

¿Cuántos Veres están sentados en la mesa? Verifica que tu solución es la única solución posible.

Problema de la Semana
Problema D y Solución
Fuera de Este Mundo

Problema

En un planeta muy lejano, existen dos tipos de habitantes: Veres, que siempre dicen la verdad, y Nugatores, que siempre mienten.

Cuatro habitantes del planeta están sentados en una mesa circular. Cuando les preguntan, "¿Eres un Vere o un Nugator?", los cuatro responden, "Vere". Cuando les preguntan, "La persona a tu derecha es un Vere o un Nugator?", los cuatro responden, "Nugator".

¿Cuántos Veres están sentados en la mesa? Verifica que tu solución es la única solución posible.

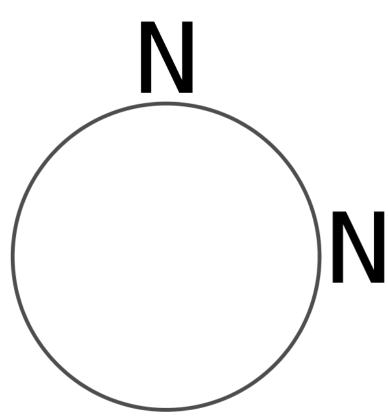
Solución

Hay cinco opciones que debemos considerar: puede haber 4 Veres, puede haber 3 Veres y 1 Nugator, puede haber 2 Veres y 2 Nugatores, puede haber 1 Vere y 4 Nugatores, o puede haber 4 Nugatores.

Podemos eliminar casos de la siguiente manera:

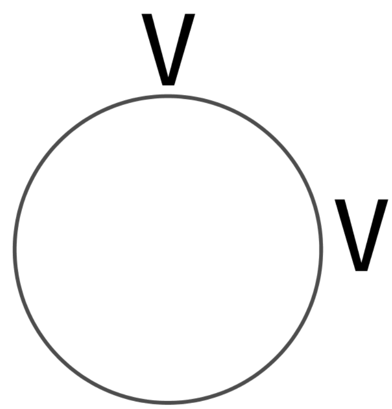
1. **¿Puede haber dos Nugatores sentados consecutivamente?**

   Supongamos que hay dos Nugatores consecutivos en la mesa. Como los Nugatores siempre mienten, cuando respondan a la primera pregunta, ambos mentiran y dirán "Vere". Sin embargo, al responder la segunda pregunta, el Nugator que está sentado a la izquierda, mentirá y dirá que la persona a la derecha es "Vere". Como todos respondieron "Nugator", esto es una contradicción. Por lo tanto, no puede haber dos Nugatores sentados consecutivamente. Esta observación, implica que no puede haber 3 o más Nugatores, ya que habría dos sentados consecutivamente.

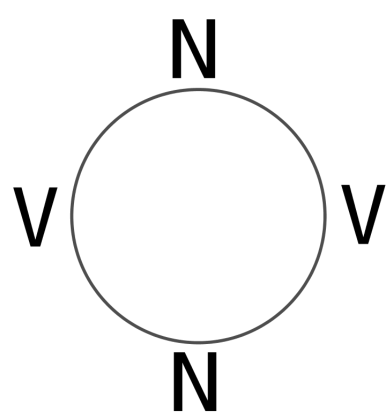


2. **¿Puede haber dos Veres sentados consecutivamente?**

   Supongamos que hay dos Veres consecutivos en la mesa. Como los Veres siempre dicen la verdad, cuando respondan a la primera pregunta, ambos dirán la verdad: “Vere”. Sin embargo, al responder la segunda pregunta, el Vere que está sentado a la izquierda dirá la verdad, que la persona a su derecha es “Vere”. Como todos respondieron “Nugator”, esto es una contradicción. Por lo tanto, no puede haber dos Veres sentados consecutivamente. Esta observación, implica que no puede haber 3 o más Veres, ya que habría dos sentados consecutivamente.



La única posibilidad restante es que haya 2 Veres y 2 Nugatores sentados en la mesa. Además sabemos que los dos Nugatores no están consecutivos y que los dos Veres no están consecutivos. El siguiente diagrama muestra cómo deben estar sentados.



Podemos corroborar que este acomodo satisface el problema. Como todos los Nugatores mienten y todos los veres dicen la verdad, todos responderán “Vere” a la primera pregunta. Como todos los Nugatores mienten y todos los Veres dicen la verdad, todos responderán “Nugator” a la segunda pregunta.

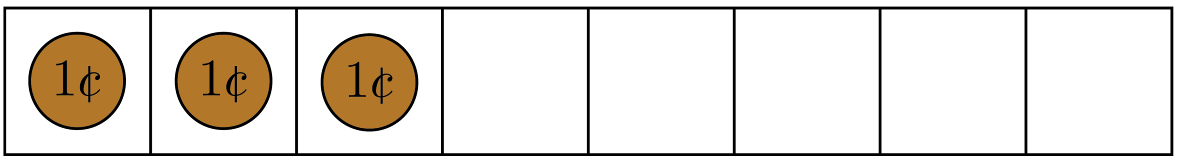
Por lo tanto, hay dos Veres y dos Nugatores, y están sentados alternadamente: Vere, Nugator, Vere, Nugator.

Problema de la Semana

Problema D

Mis Tres Centavos

Adeline y Bai están jugando con tres monedas de 1 centavo y un tablero que consiste de 8 cuadros. Al inicio, los centavos se colocan en los tres cuadros de la izquierda, como se muestra en la figura:



Las reglas del juego son las siguientes:

- En cada turno, el jugador debe mover un centavo, uno o más cuadros hacia la derecha.
- El centavo no puede pasar por encima de otro centavo, o terminar en el mismo cuadro que otro centavo.
- El juego termina cuando los tres centavos están en los tres cuadros de la derecha. El ganador es el último jugador en mover un centavo.

Adeline sabe que si le toca empezar, entonces siempre puede ganar el juego, sin importar que movimientos haga Bai. Describe el primer movimiento de Adeline y su estrategia ganadora.

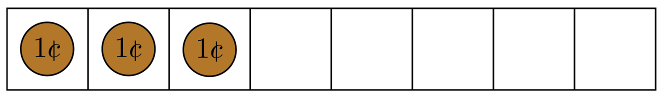
Problema de la Semana

Problema D y Solución

Mis Tres Centavos

Problema

Adeline y Bai están jugando con tres monedas de 1 centavo y un tablero que consiste de 8 cuadros. Al inicio, los centavos se colocan en los tres cuadros de la izquierda, como se muestra en la figura:



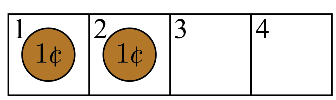
Las reglas del juego son las siguientes:

- En cada turno, el jugador debe mover un centavo, uno o más cuadros hacia la derecha.
- El centavo no puede pasar por encima de otro centavo, o terminar en el mismo cuadro que otro centavo.
- El juego termina cuando los tres centavos están en los tres cuadros de la derecha. El ganador es el último jugador en mover un centavo.

Adeline sabe que si le toca empezar, entonces siempre puede ganar el juego, sin importar que movimientos haga Bai. Describe el primer movimiento de Adeline y su estrategia ganadora.

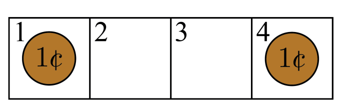
Solución

Primero, consideremos jugar el juego con dos centavos y cuatro cuadros. Numeremos los cuadros del 1 al 4, empezando por la izquierda. Los dos centavos empezarán en los cuadros 1 y 2. Llamaremos a los jugadores A y B, donde A tiene el primer turno.

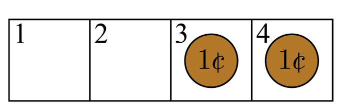


Forzosamente A debe mover el centavo en el cuadro 2 y tiene dos opciones, moverlo al cuadro 4 o al 3.

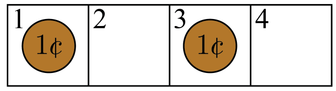
- *Opción 1:* A mueve el centavo del cuadro 2 al 4. Entonces los centavos quedarán en los cuadros 1 y 4.

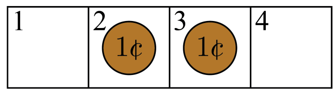
  Si B mueve el centavo del cuadro 1 al 3, entonces ganará el juego, porque los centavos estarán en los cuadros 3 y 4.

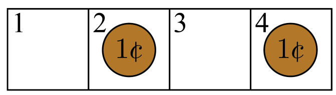
- *Opción 2:* A mueve el centavo del cuadro 2 al 3. Entonces los centavos quedarán en los cuadros 1 y 3.

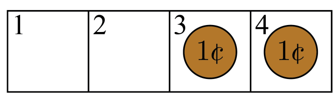
  Entonces B tiene dos opciones, mover el centavo en el cuadro 3 o mover el centavo en el cuadro 1. Sin embargo, si B quiere ganar, no debe mover el centavo del cuadro 3 al 4. Ya que, de hacer eso, los centavos quedarían en los cuadros 1 y 4, y ya sabemos que en ese caso A puede ganar, simplemente debe mover el centavo del cuadro 1 al 3. Entonces, B debe mover el centavo del cuadro 1 al 2. Entonces los centavos quedarán en los cuadros 2 y 3.

  A estaría forzado a mover el centavo del cuadro 3 al 4. Entonces los centavos quedarían en 2 y 4.

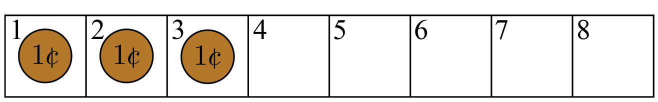
  

  Entonces B movería el centavo del cuadro 2 al cuadro 3, y ganaría el juego, porque los centavos están en los cuadros 3 y 4.

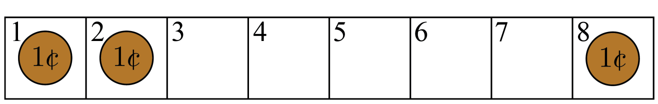
  

En el juego con sólo dos centavos y cuatro cuadros, B siempre puede ganar, sin importar lo que haga A en sus turnos. Si observas con cuidado, te puedes dar cuenta que la estrategia ganadora de B es copiar el movimiento que hace A con el otro centavo. Los dos centavos empiezan juntos. A debe mover el centavo de la derecha y esto crea un espacio entre los dos centavos. En el siguiente turno, B puede mover el centavo de la izquierda de forma que quede pegado al centavo de la derecha. La cantidad de cuadros realmente no importa. Sin importar lo que A hace con el centavo de la derecha, B puede replicarlo con el centavo de la izquierda. B gana en esta versión del juego, pero en nuestro juego, A gana ya que tenemos un centavo más.

En nuestro juego, Adeline es A y los centavos empiezan en los cuadros 1, 2 y 3.



Si Adeline mueve el centavo de 3 a 8, entonces solo nos quedan los cuadros del 1 al 7 y el juego se reduce a un juego de dos centavos en 7 cuadros.



Ahora, no importa a dónde mueva Bai la moneda en el cuadro 2, Adeline puede replicar el movimiento con el centavo del cuadro 1. Esto garantiza que Adeline ganará el juego.

Problema de la Semana

Problema D

La Hora del Pastel

Finn y Lea tienen una pastelería. Finn se dedica a hornear, mientras que Lea decora los pasteles. En cierto día, deben completar cinco pedidos. No importa el orden en el que completan los pasteles, pero, para poder decorar un pastel, primero se debe de hornear. Un pastel se puede decorar en cualquier momento después de haber sido horneado. Además, Finn y Lea sólo pueden trabajar en un pastel a la vez.

Los tiempos que se necesitan para hornear y decorar cada uno de los pasteles se muestran en la siguiente tabla.

Número de pedido	**Tipo de Pastel**	**Tiempo de Horneado (min)**	**Tiempo de Decorado (min)**
1	Pastel de Zanahoria	50	20
2	Pastel de Vainilla	30	60
3	Pay de fresa	70	40
4	Pastel arcoiris	100	90
5	Pastel de Ángel	80	10

Si Finn y Lea empiezan a trabajar en estos pedidos a las 9:30 a.m. ¿A qué hora es lo más temprano que pueden tener listos los cinco pasteles? Justifica tu respuesta.

Problema de la Semana

Problema D y Solución

La Hora del Pastel

Problema

Finn y Lea tienen una pastelería. Finn se dedica a hornear, mientras que Lea decora los pasteles. En cierto día, deben completar cinco pedidos. No importa el orden en el que completan los pasteles, pero, para poder decorar un pastel, primero se debe de hornear. Un pastel se puede decorar en cualquier momento después de haber sido horneado. Además, Finn y Lea sólo pueden trabajar en un pastel a la vez.

Los tiempos que se necesitan para hornear y decorar cada uno de los pasteles se muestran en la siguiente tabla.

Número de pedido	Tipo de Pastel	Tiempo de Horneado (min)	Tiempo de Decorado (min)
1	Pastel de Zanahoria	50	20
2	Pastel de Vainilla	30	60
3	Pay de fresa	70	40
4	Pastel arcoiris	100	90
5	Pastel de Ángel	80	10

Si Finn y Lea empiezan a trabajar en estos pedidos a las 9:30 a.m. ¿A qué hora es lo más temprano que pueden tener listos los cinco pasteles? Justifica tu respuesta.

Solución

La suma de todos los tiempos de horneado es 330 minutos. De forma similar, la suma de todos los tiempos de decorado es 220 minutos. Como $330 > 220$, podemos concluir que tomará al menos 330 minutos completar todos los pedidos. Más aún, como el último pastel en ser horneado también necesita decorarse, no es posible completar los pedidos en 330 minutos. El menor tiempo de decorado es 10 minutos, así que el menor tiempo posible para completar todos los pedidos es $330 + 10 = 340$ minutos. Ahora, necesitamos ver si podemos acomodar todos los pedidos de manera que se puedan completar en 340 minutos.

Si ponemos los pedidos con el menor tiempo de decorado al final, entonces Finn no estará esperando mucho tiempo después de terminar de hornear. Análogamente, si ponemos los pedidos con el menor tiempo de horneado al principio, entonces Lea no tendrá que esperar mucho tiempo para poder empezar a decorar. Ordenemos los tiempos de horneado y decorado de menor a mayor, para poner los pedidos con el menor tiempo de horneado al principio, y los pedidos con menor tiempo de decorado al final.

El menor tiempo posible es el de decorar en 10 minutos el Pedido 5. Así que lo ponemos al final.

Posición	1°	2°	3°	4°	5°
# de Pedido					5

El siguiente menor tiempo es el de decorar en 20 minutos el Pedido 1. Ponemos este pedido en penúltimo lugar.

Posición	1°	2°	3°	4°	5°
# de Pedido				1	5

El siguiente menor tiempo es el de hornear en 30 minutos el Pedido 2. Ponemos ese pedido al principio.

Posición	1°	2°	3°	4°	5°
# de Pedido	2			1	5

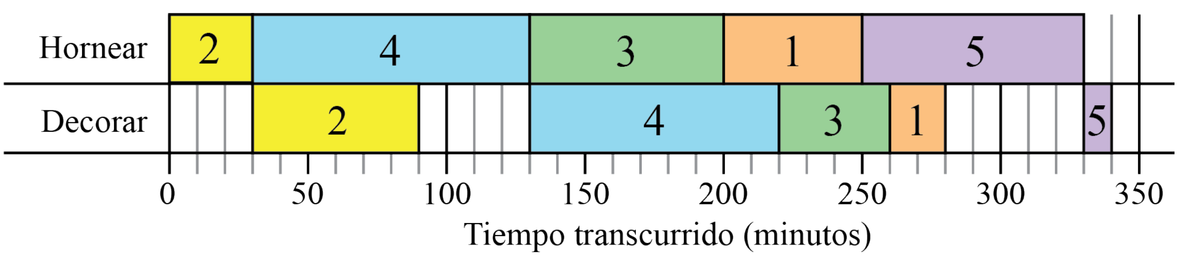
El siguiente menor tiempo es el de decorar en 40 minutos el Pedido 3. Ponemos ese pedido en antepenúltimo.

Posición	1°	2°	3°	4°	5°
# de Pedido	2		3	1	5

El último pedido por acomodar es el 4. Lo ponemos en la segunda posición, que es la única opción que queda. Así queda determinada la posición de todos los pedidos.

Posición	1°	2°	3°	4°	5°
# de Pedido	2	4	3	1	5

Ahora hacemos un cronograma para ayudarnos a calcular cuánto tardan en completarse las órdenes de esta forma. El cronograma muestra los intervalos de tiempo en los que cada pastel se hornea y se decora. Como el horneado y decorado de cada pastel puede ocurrir al mismo tiempo, hay dos líneas de tiempo simultáneas, la primera para el horneado y la segunda para el decorado. Finn hornea los pasteles consecutivamente, mientras Lea empieza a decorar pasteles una vez que estén horneados y Lea esté disponible.



Utilizando el cronograma, podemos ver que tardan 340 minutos en completar los pedidos, así que encontramos un acomodo que nos permite completar todos los pedidos en 340 minutos.

Como 340 minutos es igual a 5 h 40 min, y Finn y Lea empiezan a trabajar a las 9:30 a.m., se sigue que lo más temprano que terminarán de hacer todos los pedidos es a las 3:10 p.m.

Nota: Resulta que este no es el único acomodo que produce un tiempo de 340 minutos. Una lista completa de todos los acomodos de pedidos que se completan en 340 minutos se muestra a continuación, donde los números de pedido están escritos en el órden en que fueron completados.

- 1, 2, 4, 3, 5
- 2, 1, 4, 3, 5
- 2, 3, 4, 1, 5
- 2, 4, 1, 3, 5
- 2, 4, 3, 1, 5
- 3, 2, 4, 1, 5
- 4, 1, 2, 3, 5
- 4, 1, 3, 2, 5
- 4, 2, 1, 3, 5
- 4, 2, 3, 1, 5
- 4, 3, 1, 2, 5
- 4, 3, 2, 1, 5

Conexión con Ciencias de la Computación

Para resolver este problema utilizamos un *algoritmo glotón*, que es un estrategia para resolver problemas de optimización. Utilizando esta estrategia, en cada paso elegimos la mejor opción disponible, con la esperanza de obtener la solución óptima. Los algoritmos glotones no siempre producen la solución óptima, pero son útiles porque son fáciles de describir e implementar, y muchas veces dan una buena aproximación de la solución óptima.

Problema de la Semana

Problema D

Ciclistas Veloces

Las cinco primeras en terminar una carrera de bicicletas fueron Ana, Lourdes, Raquel, Lorena, e Isabel, en algún orden. Los bicicletas eran todas de colores distintos (negra, blanca, verde, azul o roja) y tienen distintas edades (18, 21, 25, 26, o 29). Utiliza las siguientes pistas para determinar la edad de cada persona, su color de bici, y en que posición terminaron la carrera.

1. Las cinco ciclistas son: la que terminó en primero, la de 26 años, Lorena, la de la bicicleta blanca, y Ana.
2. Raquel llevaba la bicicleta blanca y teminó en tercero.
3. Lorena es 3 años más joven que la persona con la bicicleta roja.
4. La persona más vieja llevaba la bicicleta blanca y terminó justo antes de la persona más joven, que llevaba la bicicleta negra.
5. La persona con la bicicleta verde terminó primero, y alguien menor terminó justo después.
6. Isabel terminó justo después de Lorena.

La siguiente tabla te puede ser útil para organizar la información.

	1^{ro}	2^{do}	3^{ro}	4^{to}	5^{to}	Negra	Blanca	Verde	Azul	Roja	18	21	25	26	29
Ana															
Lourdes															
Raquel															
Lorena															
Isabel															
18															
21															
25															
26															
29															
Negra															
Blanca															
Verde															
Azul															
Roja															

Problema de la Semana

Problema D y Solución

Ciclistas Veloces

Problema

Las cinco primeras en terminar una carrera de bicicletas fueron Ana, Lourdes, Raquel, Lorena, e Isabel, en algún orden. Los bicicletas eran todas de colores distintos (negra, blanca, verde, azul o roja) y tienen distintas edades (18, 21, 25, 26, o 29). Utiliza las siguientes pistas para determinar la edad de cada persona, su color de bici, y en que posición terminaron la carrera.

1. Las cinco ciclistas son: la que terminó en primero, la de 26 años, Lorena, la de la bicicleta blanca, y Ana.
2. Raquel llevaba la bicicleta blanca y teminó en tercero.
3. Lorena es 3 años más joven que la persona con la bicicleta roja.
4. La persona más vieja llevaba la bicicleta blanca y terminó justo antes de la persona más joven, que llevaba la bicicleta negra.
5. La persona con la bicicleta verde terminó primero, y alguien menor terminó justo después.
6. Isabel terminó justo después de Lorena.

La siguiente tabla te puede ser útil para organizar la información.

	1^{ro}	2^{do}	3^{ro}	4^{to}	5^{to}	Negra	Blanca	Verde	Azul	Roja	18	21	25	26	29
Ana															
Lourdes															
Raquel															
Lorena															
Isabel															
18															
21															
25															
26															
29															
Negra															
Blanca															
Verde															
Azul															
Roja															

Solución

Primero daremos la solución, y luego explicaremos cómo la obtuvimos.

- Lourdes tiene 25 años, su bicicleta es verde y terminó en primero.
- Ana tiene 21 años, su bicicleta es roja y terminó en segundo.
- Raquel tiene 29 años, su bicicleta es blanca y terminó en tercero.
- Lorena tiene 18 años, su bicicleta es negra y terminó en cuarto.
- Isabel tiene 26 años, su bicicleta es azul y terminó en quinto.

Hay varias formas de llegar a la respuesta. Puede que hayas usado la tabla para anotar cuáles parejas eran posibles o imposibles después de examinar y combinar las pistas. A continuación sólo presentamos una explicación con palabras. Te sugerimos que vayas llenando la tabla mientras lees la explicación.

De las pistas 2 y 4, Raquel lleva la bicicleta blanca, terminó en tercero y tiene 29 años. La pista 4 también nos dice que la que tiene 18 llevaba la bicicleta negra y terminó en cuarto.

De la pista 3, Lorena y la persona con la bicicleta roja deben tener 18 y 21 años, o 26 y 29 años. Sin embargo, de la pista 1, sabemos que Lorena no tiene 26. Entonces Lorena debe tener 18 años y la persona con la bicicleta roja debe tener 21. Eso significa que Lorena terminó en cuarto y tiene la bicicleta negra.

De la pista 5, Isabel terminó en quinto. Se sigue de la pista 1 que tiene 26 años, ya que no terminó en primero, ni usó la bicicleta blanca.

Entonces, las que terminaron en primero y segundo deben tener 25 y 21, en algún orden. De la pista 5 sabemos que la que tiene 25 años debe haber termiando en primero, seguida de la de 21, que ya sabemos que llevaba la bicicleta roja. La pista 5 también nos dice que la persona que terminó en primero llevaba la bicicleta verde. Entonces Isabel llevaba la bicicleta azul.

De la pista 1, Ana no terminó en primero, lo que significa que terminó en segundo, y Lourdes terminó primero.