El CENTRO de EDUCACIÓN en
MATEMÁTICAS y COMPUTACIÓN

Problema de la Semana
Problemas y Soluciones
2022 - 2023

Problema D (Grado 9/10)

Temas

(Has clic en el nombre del tema para saltar a esa sección.)

Los problemas de este folleto están organizados de acuerdo a los temas del currículo. Un problema puede aparecer en varios temas.

Sentido Numérico (N)

VOLVER
A LA
PORTADA

Problema de la Semana

Problema D

¿Cuantás Personas Hay en el Teatro?

El teatro POTW tiene cuatro tipos de asientos: oro, platino, rojo y negro.

Una noche, se le preguntó al gerente del teatro cuantas personas habían en el treatro. El gerente respondió que $\frac{1}{6}$ de las personas en el treatro esa noche estaban en los asientos tipo oro, $\frac{1}{4}$ de las personas estaban en los asientos rojos o negros, la cantidad de personas en asientos platinos es 3 veces más que la cantidad de personas en asientos rojos, y hay 138 personas en asientos negros.

¿Cuantás personas habían en en el teatro esa noche?

Problema de la Semana

Problema D y Solución

¿Cuantás Personas Hay en el Teatro?

Problema

El teatro POTW tiene cuatro tipos de asientos: oro, platino, rojo y negro.

Una noche, se le preguntó al gerente del teatro cuantas personas habían en el treatro. El gerente respondió que $\frac{1}{6}$ de las personas en el treatro esa noche estaban en los asientos tipo oro, $\frac{1}{4}$ de las personas estaban en los asientos rojos o negros, la cantidad de personas en asientos platinos es 3 veces más que la cantidad de personas en asientos rojos, y hay 138 personas en asientos negros.

¿Cuantás personas habían en en el teatro esa noche?

Solución

Sea n número total de personas en el teatro esa noche.
Sea g el número de personas en asientos tipo oro, s el número de personas en asientos platinos, r el número de personas en asientos rojos, y b el número de personas en asientos negros.

Claramente, $n = g + s + r + b$.

Como $\frac{1}{6}$ de las personas en el teatro estaban en asientos tipo oro, $g = \frac{1}{6}n$.

Como $\frac{1}{4}$ de las personas en el teatro estaban en asientos rojos o negros, $r + b = \frac{1}{4}n$.

Tenemos que $b = 138$. Por lo tanto, $r + b = \frac{1}{4}n$ se convierte en $r + 138 = \frac{1}{4}n$, o $r = \frac{1}{4}n - 138$.

Como la cantidad de personas en asientos platinos es 3 veces más que la cantidad de personas en asientos rojos, $s = 3r = 3(\frac{1}{4}n - 138)$.

Reemplazando estas expresiones para g, r, y s, y el valor de b en $n = g + s + r + b$, tenemos que

$$\begin{aligned}
n &= \left(\frac{1}{6}n\right) + 3\left(\frac{1}{4}n - 138\right) + \left(\frac{1}{4}n - 138\right) + 138 \\
n &= \frac{1}{6}n + \frac{3}{4}n - 414 + \frac{1}{4}n - 138 + 138 \\
n &= \frac{1}{6}n + n - 414 \\
n &= \frac{7}{6}n - 414 \\
\frac{1}{6}n &= 414 \\
n &= 2484
\end{aligned}$$

Por lo tanto, habían 2484 personas en el teatro esa noche.

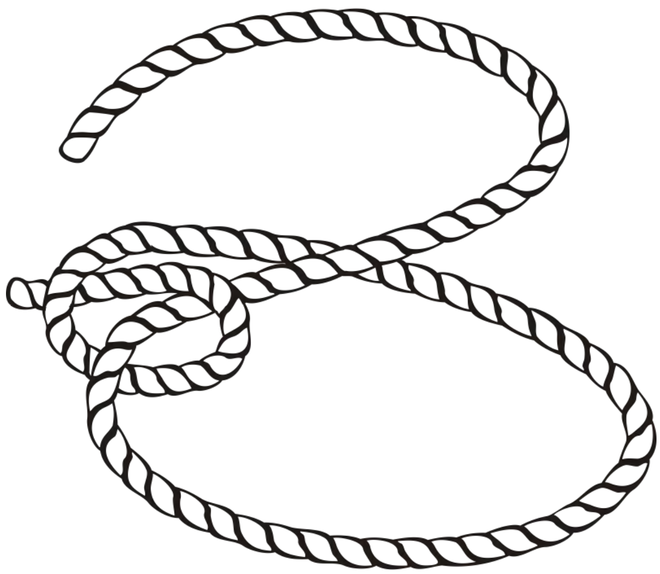
A pesar de que no nos piden esto, podemos inclusive determinar que la cantidad de personas en asientos platinos es 1449, la cantidad de personas en asientos tipo oro es 414, y la cantidad de personas en asientos rojos es 483. Con estos valores podemos verificar los datos dados en el problema.

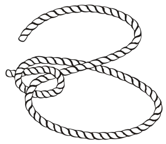
Problema de la Semana

Problema D

Tres Triángulos y un Cuadrado

Simón tiene una cuerda que mide 200 cm de largo. Él corta la cuerda en cuatro piezas para que con una de las piezas sea posible formar un cuadrado, con sus dos extremos tocándose, y con las tres piezas restantes se puedan formar tres triángulos equiláteros, cada uno con sus dos extremos tocándose. Si las cuatro figuras tienen longitudes de lado enteras, en cm, determine todas las posibilidades para las longitudes de lado de cada triángulo y el cuadrado.





Problema de la Semana

Problema D y Solución

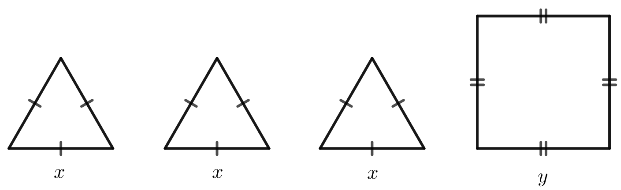
Tres Triángulos y un Cuadrado

Problema

Simón tiene una cuerda que mide 200 cm de largo. Él corta la cuerda en cuatro piezas para que con una de las piezas sea posible formar un cuadrado, con sus dos extremos tocándose, y con las tres piezas restantes se puedan formar tres triángulos equiláteros, cada uno con sus dos extremos tocándose. Si las cuatro figuras tienen longitudes de lado enteras, en cm, determine todas las posibilidades para las longitudes de lado de cada triángulo y el cuadrado.

Solución

Sea x la longitud del lado, en centímetros, de cada triángulo equilátero y sea y la longitud del lado, en centímetros, del cuadrado.



El perímetro de cada figura es la longitud del trozo de cuerda que se usó para formarla. Para cada triángulo, la longitud de la cuerda es $3x$ y para el cuadrado la longitud de la cuerda es $4y$. La cuerda total utilizada es $3(3x) + 4y = 9x + 4y$. Pero la longitud de la cuerda es 200 cm. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 9x + 4y &= 200 \\ 9x &= 200 - 4y \\ x &= \frac{4(50-y)}{9} \end{aligned}$$

Sabemos que x y y son números enteros, y la información dada en el problema implica que x y y deben ser positivos. Dado que tanto x como y son números enteros, $4(50 - y)$ debe ser un múltiplo de 9. Pero 4 no es divisible por 9, por lo que $50 - y$ debe ser divisible por 9. Hay cinco múltiplos positivos de 9 entre 0 y 50: 9, 18, 27, 36 y 45. Entonces $50 - y$ debe ser igual a 9, 18, 27, 36 o 45. De ello se deduce que y es igual a 41, 32, 23, 14 o 5. Los valores correspondientes de x se calculan en la siguiente tabla.

y	$4y$	$200 - 4y$	$x = \frac{200-4y}{9}$
41	164	36	4
32	128	72	8
23	92	108	12
14	56	144	16
5	20	180	20

Consecuentemente, hay 5 posibilidades. Cuando la longitud del lado del cuadrado es 41 cm, la longitud del lado de cada triángulo es 4 cm; cuando la longitud del lado del cuadrado es 32 cm, la longitud del lado de cada triángulo es 8 cm; cuando la longitud del lado del cuadrado es 23 cm, la longitud del lado de cada triángulo es 12 cm; cuando la longitud del lado del cuadrado es 14 cm, la longitud del lado de cada triángulo es 16 cm; y cuando la longitud del lado del cuadrado es de 5 cm, la longitud del lado de cada triángulo es de 20 cm.

Problema de la Semana

Problema D

¿Cuánto es la Cuenta?

Un restaurante esta reacudando fondos para hacer una donacion a su comunidad local. Los clientes del restaurante pueden aportar lo que deseen por una comida, siempre y cuando contribuyan con al menos \$1. Una noche, el precio promedio pagado por todos los clientes fue \$55. Un cliente más entró y pagó \$70 por su comida, elevando el promedio a \$56. ¿Cuál es el precio más alto posible que un cliente podría haber pagado por su comida esa noche? Crees que las cantidades pagadas son razonables en este caso?

Problema de la Semana

Problema D y Solución

¿Cuánto es la Cuenta?

Problema

Un restaurante esta reacudando fondos para hacer una donacion a su comunidad local. Los clientes del restaurante pueden aportar lo que deseen por una comida, siempre y cuando contribuyan con al menos \$1. Una noche, el precio promedio pagado por todos los clientes fue \$55. Un cliente más entró y pagó \$70 por su comida, elevando el promedio a \$56. ¿Cuál es el precio más alto posible que un cliente podría haber pagado por su comida esa noche? Crees que las cantidades pagadas son razonables en este caso?

Solución

Para calcular el promedio de un conjunto de valores, primero calculamos la suma de los valores del conjunto y luego la dividimos por el número de valores del conjunto. De ello se deduce que la suma de los valores del conjunto es igual a su promedio multiplicado por el número de valores del conjunto.

Sea n el número de clientes esa noche. Entonces, la cantidad total pagada por todos los clientes esa noche fue $56n$. El cliente final pagó 70 dólares por su comida. Antes de que llegara este cliente, había $(n-1)$ clientes y habían pagado un total de $(56n-70)$ dólares. En ese momento, el precio promedio pagado por todos los clientes era de 55 dólares. Usando esta información, podemos escribir y resolver la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned}\frac{56n-70}{n-1} &= 55\\ 56n-70 &= 55(n-1)\\ 56n-70 &= 55n-55\\ n &= 15\end{aligned}$$

Dado que $n = 15$, se deduce que hubo 15 clientes esa noche y, por lo tanto, la cantidad total pagada por todos los clientes fue $56n = 56(15) = 840$ dólares.

Para determinar el precio más alto posible que un cliente podría haber pagado por su comida esa noche, supondremos que 13 de los clientes pagaron el precio más bajo posible de \$1. Entonces el cliente restante habría pagado $840 - 13 \times 1 - 70 = 757$ dólares.

Por lo tanto, el precio más alto posible que un cliente podría haber pagado por su comida esa noche es \$757.

Como ésta es una recolecta de dinero para una donación, \$1 es probablemente una cantidad muy pequeña para donar por una comida. Similarmente, \$757 es una cantidad muy generosa para donar por una comida.

Extensión:

¿Cómo cambiaría la respuesta si dos clientes no pueden pagar la misma cantidad por su comida?

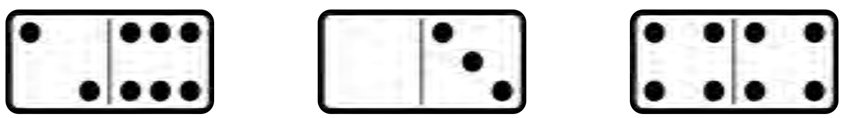
Problema de la Semana

Problema D

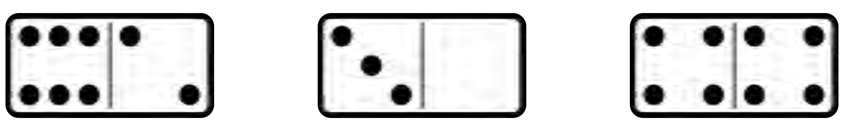
La Ficha Perdida

Una ficha de dominó es una ficha rectangular con una línea que divide su cara en dos extremos cuadrados. Cada extremo está marcado con una serie de puntos o está completamente en blanco.

La primera ficha de dominó que se muestra a continuación es una ficha de dominó de $[2, 6]$, ya que tiene 2 puntos en su extremo izquierdo y 6 puntos en su extremo derecho. La segunda ficha de dominó que se muestra a continuación es una ficha de dominó de $[0, 3]$, ya que tiene 0 puntos en su extremo izquierdo y 3 puntos en su extremo derecho. El tercer dominó que se muestra a continuación es un dominó de $[4, 4]$, ya que tiene 4 puntos en su extremo izquierdo y 4 puntos en su extremo derecho.



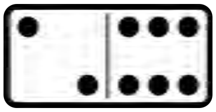
También podemos rotar las fichas de dominó. La primera ficha de dominó que se muestra a continuación es una ficha de dominó de $[6, 2]$, ya que tiene 6 puntos en su extremo izquierdo y 2 puntos en su extremo derecho. Sin embargo, dado que esta ficha se puede obtener girando la ficha $[2, 6]$, $[6, 2]$ y $[2, 6]$ representan el mismo dominó. De manera similar, el segundo dominó que se muestra a continuación es un dominó de $[3, 0]$. Nuevamente, ten en cuenta que $[3, 0]$ y $[0, 3]$ representan el mismo dominó.



Un juego de dominó de máximo 2 puntos es el que contiene todas las fichas posibles con un número de puntos que va desde 0 a 2 en cada uno de sus extremos, sin que haya dos fichas de dominó iguales. Un juego de dominó de máximo 2 puntos tiene las siguientes seis fichas: $[0, 0]$, $[0, 1]$, $[0, 2]$, $[1, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 2]$. Observa que las tres fichas de dominó $[1, 0]$, $[2, 0]$ y $[2, 1]$ no aparecen en la lista porque son las mismas que las tres fichas de dominó $[0, 1]$, $[0, 2]$ y $[1, 2]$.

Del mismo modo, un juego de dominó de máximo 9 puntos contiene todas las fichas posibles con un número de puntos que oscila entre 0 y 9 en cada uno de sus extremos, sin que haya dos fichas de dominó iguales.

Daniel y Benito separan un juego de dominó de máximo 9 puntos en dos pilas. Daniel cuenta todos los puntos de las fichas de dominó de la primera pila. Él cuenta que hay un total de 213 puntos. Benito cuenta todos los puntos de las fichas de dominó de la segunta pila. Él cuenta que hay un total de 266 puntos. Luego, se dan cuenta de que falta una ficha de dominó en el juego. Daniel también señala que, en una de las dos pilas, se encuentran todas las fichas de dominó que tienen el mismo número de puntos en sus extremos izquierdo y derecho. ¿Qué dominó falta en el juego?



Problema de la Semana

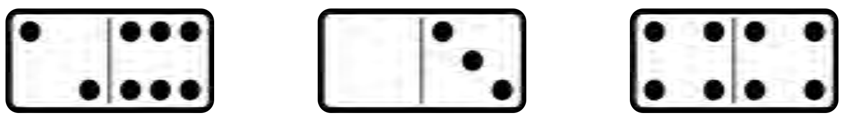
Problema D y Solución

La Ficha Perdida

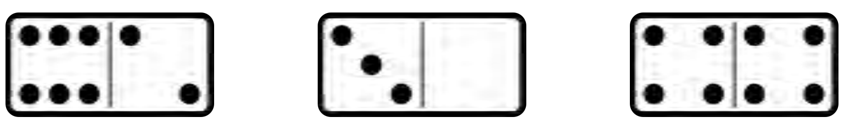
Problema

Una ficha de dominó es una ficha rectangular con una línea que divide su cara en dos extremos cuadrados. Cada extremo está marcado con una serie de puntos o está completamente en blanco.

La primera ficha de dominó que se muestra a continuación es una ficha de dominó de $[2, 6]$, ya que tiene 2 puntos en su extremo izquierdo y 6 puntos en su extremo derecho. La segunda ficha de dominó que se muestra a continuación es una ficha de dominó de $[0, 3]$, ya que tiene 0 puntos en su extremo izquierdo y 3 puntos en su extremo derecho. El tercer dominó que se muestra a continuación es un dominó de $[4, 4]$, ya que tiene 4 puntos en su extremo izquierdo y 4 puntos en su extremo derecho.



También podemos rotar las fichas de dominó. La primera ficha de dominó que se muestra a continuación es una ficha de dominó de $[6, 2]$, ya que tiene 6 puntos en su extremo izquierdo y 2 puntos en su extremo derecho. Sin embargo, dado que esta ficha se puede obtener girando la ficha $[2, 6]$, $[6, 2]$ y $[2, 6]$ representan el mismo dominó. De manera similar, el segundo dominó que se muestra a continuación es un dominó de $[3, 0]$. Nuevamente, ten en cuenta que $[3, 0]$ y $[0, 3]$ representan el mismo dominó.



Un juego de dominó de máximo 2 puntos es el que contiene todas las fichas posibles con un número de puntos que va desde 0 a 2 en cada uno de sus extremos, sin que haya dos fichas de dominó iguales. Un juego de dominó de máximo 2 puntos tiene las siguientes seis fichas: $[0, 0]$, $[0, 1]$, $[0, 2]$, $[1, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 2]$. Observa que las tres fichas de dominó $[1, 0]$, $[2, 0]$ y $[2, 1]$ no aparecen en la lista porque son las mismas que las tres fichas de dominó $[0, 1]$, $[0, 2]$ y $[1, 2]$.

Del mismo modo, un juego de dominó de máximo 9 puntos contiene todas las fichas posibles con un número de puntos que oscila entre 0 y 9 en cada uno de sus extremos, sin que haya dos fichas de dominó iguales.

Daniel y Benito separan un juego de dominó de máximo 9 puntos en dos pilas. Daniel cuenta todos los puntos de las fichas de dominó de la primera pila. Él cuenta que hay un total de 213 puntos. Benito cuenta todos los puntos de las fichas de dominó de la segunta pila. Él cuenta que hay un total de 266 puntos. Luego, se dan cuenta de que falta una ficha de dominó en el juego. Daniel también señala que, en una de las dos pilas, se encuentran todas las fichas de dominó que tienen el mismo número de puntos en sus extremos izquierdo y derecho. ¿Qué dominó falta en el juego?

Solución

Primero determinemos qué fichas de dominó hay en un juego de dominó de máximo 9 puntos y calculemos el número total de puntos en todas las fichas de dominó del juego. En un juego de dominó de máximo 9 puntos, la cantidad de puntos en cada extremo de una ficha de dominó puede oscilar entre 0 y 9. Dado que girar una ficha de dominó no cambia el dominó, orientamos cada dominó de manera que el número más pequeño esté siempre en el extremo izquierdo del dominó. Para cada número posible en el extremo izquierdo del dominó, examinamos los números de puntos posibles que pueden ocurrir en el extremo derecho del dominó y luego calculamos el número total de puntos en todos los dominós con ese número de puntos en el extremo izquierdo. Recopilamos esta información en la siguiente tabla.

Número en el extremo izquierdo del dominó	Números posibles en el extremo derecho del dominó	Número total de puntos en todas las fichas de dominó
0	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$
1	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	$9(1)+1+2+3+4+5+6+7+8+9=54$
2	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	$8(2)+2+3+4+5+6+7+8+9=60$
3	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	$7(3)+3+4+5+6+7+8+9=63$
4	4, 5, 6, 7, 8, 9	$6(4)+4+5+6+7+8+9=63$
5	5, 6, 7, 8, 9	$5(5)+5+6+7+8+9=60$
6	6, 7, 8, 9	$4(6)+6+7+8+9=54$
7	7, 8, 9	$3(7)+7+8+9=45$
8	8, 9	$2(8)+8+9=33$
9	9	$1(9)+9=18$

Por lo tanto, el número total de puntos en todas las fichas de dominó en un juego de dominó de máximo 9 puntos es

$$45+54+60+63+63+60+54+45+33+18=495$$

Consecuentemente, el número total de puntos en las dos pilas es $213+266=479$. Eso deja un total de 16 puntos en la ficha que falta.

En un juego de dominó de máximo 9 puntos, las únicas fichas con un total de 16 puntos son [8.8] y [7.9]. Dado que cada dominó con el mismo número de puntos en sus extremos izquierdo y derecho está presente en una de las dos pilas, tenemos que la ficha $[8,8]$ está presente. Por lo tanto, la ficha que falta debe ser la ficha $[7,9]$.

Problema de la Semana

Problema D

Bailemos

El consejo estudiantil de la secundaria POTW está organizando un baile escolar. Quieren dar un regalo de bienvenida a cada estudiante de noveno grado que asista al baile.

Gifts-R-Us cobra \$1.00 por regalo. Sin embargo, si compraran los regalos en Gifts-R-Us, superarían su presupuesto en \$17.

En Presents-4-U, solo cobran \$0.80 por regalo. A este precio, al consejo estudiantil le sobrarían \$5.00 en su presupuesto.

Determina la cantidad de regalos que el consejo estudiantil planea comprar.

Problema de la Semana

Problema D y Solución

Bailemos

Problema

El consejo estudiantil de la secundaria POTW está organizando un baile escolar. Quieren dar un regalo de bienvenida a cada estudiante de noveno grado que asista al baile.

Gifts-R-Us cobra \$1.00 por regalo. Sin embargo, si compraran los regalos en Gifts-R-Us, superarían su presupuesto en \$17.

En Presents-4-U, solo cobran \$0.80 por regalo. A este precio, al consejo estudiantil le sobrarían \$5.00 en su presupuesto.

Determina la cantidad de regalos que el consejo estudiantil planea comprar.

Solución

Solución 1

Sea n el número de regalos que el consejo estudiantil planea comprar.

Dado que cada obsequio en Gifts-R-Us cuesta \$1.00, el consejo estudiantil gastaría $1 \times n = n$ dólares en total. Si el consejo estudiantil fuera a comprar todos los regalos que quiere en Gifts-R-Us, le faltarían \$17 dólares en su presupuesto. Por lo tanto, su presupuesto es de $(n - 17)$ dólares.

Dado que cada obsequio en Presents-4-U cuesta \$0.80, el consejo estudiantil gastaría $0.8 \times n = 0.8n$ dólares en total. Si el consejo estudiantil comprara todos los regalos que quiere en Presents-4-U, le sobrarían \$5 dólares en su presupuesto. Por lo tanto, su presupuesto es de $(0.8n + 5)$ dólares.

Tenemos dos expresiones para el presupuesto, por lo que podemos establecer la igualdad $n - 17 = 0.8n + 5$. Esto se simplifica a $0.2n = 22$. Luego de dividir cada lado por 0.2, obtenemos $n = 110$.

Por lo tanto, el consejo estudiantil planea comprar 110 en regalos.

Solución 2

Sea n el número de regalos que el consejo estudiantil planea comprar.
Sea x la cantidad que ha presupuestado el consejo estudiantil.

Dado que la diferencia entre los costos de un solo regalo es
$\$1.00 - \$0.80 = \$0.20$, la diferencia de costo total de comprar n regalos sería $\$0.2n$.

Para comprar en Gifts-R-Us, el consejo estudiantil necesitaría gastar \$17 más de lo presupuestado. Por lo tanto, necesitarían $(x + 17)$ dólares. Para comprar en Presents-4-U, el consejo estudiantil necesitaría gastar \$5 menos de lo presupuestado. Por lo tanto, necesitarían $(x - 5)$ dólares. La diferencia de costo total de comprar n regalos sería $(x + 17) - (x - 5) = 22$ dólares.

Tenemos dos expresiones para la diferencia de costos y podemos establecer la igualdad $0.2n = 22$. Luego de dividir cada lado por 0.2, obtenemos $n = 110$.

Por lo tanto, el consejo estudiantil planea comprar 110 en regalos.

Ten en cuenta que en la Solución 1 y la Solución 2, pudimos encontrar la cantidad de obsequios sin calcular el presupuesto. En la Solución 3, primero calcularemos el presupuesto y luego lo usaremos para calcular la cantidad de obsequios.

Solución 3

Sea n el número de regalos que el consejo estudiantil planea comprar.
Sea x la cantidad que ha presupuestado el consejo estudiantil.

Dado que cada obsequio en Gifts-R-Us cuesta \$1.00, los n obsequios costarían $n \times \$1 = \$n$. Además, el consejo estudiantil necesitaría gastar \$17 más de lo presupuestado. Por lo tanto, tenemos

$$n = x + 17 \tag{1}$$

Dado que cada obsequio en Presents-4-U cuesta \$0.80, los n obsequios costarían $n \times \$0,8 = \$0,8n$. Además, el consejo estudiantil necesitaría gastar \$5 menos de lo presupuestado. Por lo tanto, tenemos

$$0.8n = x - 5 \tag{2}$$

Sustituyendo la ecuación (1) en la ecuación (2), tenemos

$$\begin{aligned} 0.8n &= x - 5 \\ 0.8(x + 17) &= x - 5 \\ 0.8x + 13.6 &= x - 5 \\ 18.6 &= 0.2x \\ x &= 93 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el consejo estudiantil ha presupuestado \$93.

Entonces, usando la ecuación (1), vemos que $n = x + 17 = 93 + 17 = 110$.

Por lo tanto, el consejo estudiantil planea comprar 110 en regalos.

Problema de la Semana

Problema D

El Viaje de Profesores

Para ayudar a pasar el tiempo en un largo viaje en autobús, un grupo de profesores de matemáticas creó una secuencia de números, en la que cada profesor decía un término de la secuencia. El primer y el segundo maestro dijeron cada uno un número entero no negativo, y cada maestro después de eso dijo la suma de todos los términos anteriores en la secuencia.

Por ejemplo, si el primer maestro dijo el número 2 y el segundo maestro dijo el número 8, entonces

- el tercer profesor diría la suma del primer y segundo término, que es $2 + 8 = 10$, y
- el cuarto profesor diría la suma del primer, segundo y tercer término, que es $2 + 8 + 10 = 20$.

¿Cuántas secuencias posibles podrían haber dicho los maestros si el primer maestro dijo el número 3 y otro maestro dijo el número 3072?

Problema de la Semana

Problema D y Solución

El Viaje de Profesores

Problema

Para ayudar a pasar el tiempo en un largo viaje en autobús, un grupo de profesores de matemáticas creó una secuencia de números, en la que cada profesor decía un término de la secuencia. El primer y el segundo maestro dijeron cada uno un número entero no negativo, y cada maestro después de eso dijo la suma de todos los términos anteriores en la secuencia.

Por ejemplo, si el primer maestro dijo el número 2 y el segundo maestro dijo el número 8, entonces

- el tercer profesor diría la suma del primer y segundo término, que es $2 + 8 = 10$, y
- el cuarto profesor diría la suma del primer, segundo y tercer término, que es $2 + 8 + 10 = 20$.

¿Cuántas secuencias posibles podrían haber dicho los maestros si el primer maestro dijo el número 3 y otro maestro dijo el número 3072?

Solución

Sabemos cómo construir la secuencia y sabemos que el primer término es 3, pero ¿dónde está el término cuyo valor es 3072?

- ¿Podría 3072 ser el segundo término?

  Si los primeros dos términos son 3 y 3072, entonces podemos calcular los siguientes términos.

  - El tercer término sería $3 + 3072 = 3075$.
  - El cuarto término sería $3 + 3072 + 3075 = 3075 + 3075 = 2(3075) = 6150$.
  - El quinto término sería $3 + 3072 + 3075 + 6150 = 6150 + 6150 = 2(6150) = 12300$.

  Vemos que podemos determinar cualquier término más allá del tercer término sumando todos los términos anteriores, o simplemente podemos duplicar el término inmediatamente anterior al requerido, ya que ese término es la suma de todos los términos anteriores. (Esto también significa que si se conoce algún término después del tercero, entonces el término anterior es la mitad del valor de ese término).

Por lo tanto, hay una sucesión posible con 3072 como segundo término. Los primeros 6 términos de esta sucesión son
$3,\ 3072,\ 3075,\ 6150,\ 12300,\ 24600.$

- ¿Podría 3072 ser el tercer término?

  Sí, dado que el tercer término es la suma de los dos primeros términos, y el primer término es 3, entonces el segundo término sería $3072 - 3 = 3069$ y los primeros 6 términos de esta secuencia son
  $3,\ 3069,\ 3072,\ 6144,\ 12288,\ 24576.$

- ¿Podría 3072 ser el cuarto término?

  Sí, dado que el cuarto término es par, entonces podemos determinar que el tercer término es la mitad del cuarto término, que es $3072 \div 2 = 1536$, entonces el segundo término sería $1536 - 3 = 1533$. Los primeros 6 términos de esta secuencia son $3,\ 1533,\ 1536,\ 3072,\ 6144,\ 12288.$

- ¿Podría 3072 ser el quinto término?

  Para pasar del quinto término al tercer término dividiríamos por 2 dos veces, o podríamos dividir por 4. Si el tercer término resultante es un número entero no negativo mayor o igual que 3, entonces la secuencia existe. El tercer término sería $3072 \div 4 = 768$, y el segundo término sería $768 - 3 = 765$. Así existe la sucesión y los primeros 6 términos son
  $3,\ 765,\ 768,\ 1536,\ 3072,\ 6144.$

Podríamos continuar de esta manera hasta que descubramos todas las sucesiones posibles que se forman de acuerdo con las reglas dadas con el primer término 3 y 3072 en algún lugar de la sucesión. Sin embargo, si observamos la descomposición en factores primos de 3072 vemos que la potencia más alta de 2 que divide a 3072 es 1024 (o 2^{10}), ya que $3072 = 2^{10} \times 3$. De hecho, dividir 3072 entre 1024 produciría un tercer término que sería 3. El segundo término sería entonces 0, un número entero no negativo, y la secuencia resultante sería $3,\ 0,\ 3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ 192,\ 384,\ 768,\ 1536,\ 3072,\ 6144, \ldots$.

Si dividimos 3072 por cualquier potencia entera de 2, de $2^0 = 1$ a $2^{10} = 1024$, el tercer término resultante sería un número entero mayor que o igual a 3, y 3072 aparecerían en cada una de estas secuencias. Hay 11 tales secuencias. El número 3072 aparecería en algún lugar entre el término 3 y el término 13 en la secuencia aceptable. Sin embargo, 3072 también puede aparecer como segundo término, por lo que hay un total de 12 secuencias posibles.

¿Podría ser 3072 el decimocuarto término? Del decimocuarto término al tercer término tendríamos que dividir 3072 entre 2^{11}. El tercer término resultante sería $\frac{3}{2}$. Esto significaría que el segundo término no es un número entero y, por lo tanto, la secuencia no es posible.

Por lo tanto, hay un total de 12 secuencias posibles.

Problema de la Semana

Problema D

Multiplicación de Dígitos

Los dígitos de cualquier entero positivo se pueden multiplicar para dar el *producto de dígitos* del entero. Por ejemplo, 345 tiene el producto de dígitos de $3 \times 4 \times 5 = 60$. Hay muchos otros enteros positivos que tienen 60 como su producto de dígitos. Por ejemplo, 2532 y 14 153 tienen un producto de dígitos de 60. Ten en cuenta que 256 es el entero positivo más pequeño con un producto de dígitos de 60.

También hay muchos enteros positivos que tienen un producto de dígitos de 2160. Determine el entero más pequeño.

Problema de la Semana

Problema D y Solución

Multiplicación de Dígitos

Problema

Los dígitos de cualquier entero positivo se pueden multiplicar para dar el *producto de dígitos* del entero. Por ejemplo, 345 tiene el producto de dígitos de $3 \times 4 \times 5 = 60$. Hay muchos otros enteros positivos que tienen 60 como su producto de dígitos. Por ejemplo, 2532 y 14 153 tienen un producto de dígitos de 60. Ten en cuenta que 256 es el entero positivo más pequeño con un producto de dígitos de 60.

También hay muchos enteros positivos que tienen un producto de dígitos de 2160. Determine el entero más pequeño.

Solución

Sea N el entero positivo más pequeño cuyo producto de dígitos es 2160.

Para encontrar N, debemos encontrar el mínimo número posible de dígitos cuyo producto sea 2160. Esto se debe a que si el entero a tiene más dígitos que el entero b, entonces $a > b$. Una vez que hemos determinado los dígitos que forman N, entonces se forma el entero N escribiendo esos dígitos en orden creciente.

Tenga en cuenta que los dígitos de N no pueden incluir 0, de lo contrario, el producto de dígitos de N sería 0.

Además, los dígitos de N no pueden incluir 1, de lo contrario podríamos eliminar el 1 y obtener un entero con menos dígitos (y por lo tanto, un entero más pequeño) con el mismo producto de dígitos. Por lo tanto, los dígitos de N estarán entre 2 y 9, ambos incluídos.

Dado que los dígitos de N se multiplican a 2160, podemos usar la descomposición en factores primos de 2160 para ayudar a determinar los dígitos de N:

$$2160 = 2^4 \times 3^3 \times 5$$

Para que el producto de dígitos de N tenga un factor de 5, uno de los dígitos de N debe ser igual a 5.

El producto de dígitos de N también debe tener un factor de $3^3 = 27$. No podemos encontrar un dígito cuyo producto sea 27 pero podemos encontrar dos dígitos cuyo producto sea 27. En particular, $27 = 3 \times 9$. Por lo tanto, N también podría tener los dígitos 3 y 9.

Luego, los dígitos restantes de N deben tener un producto de $2^4 = 16$. Necesitamos encontrar una combinación del menor número de dígitos cuyo producto sea 16. No podemos tener un dígito cuyo producto sea 16, pero podemos tener dos dígitos cuyo producto sea 16. En particular, $16 = 2 \times 8$ y $16 = 4 \times 4$.

Por lo tanto, es posible que N tenga 5 dígitos. Hemos visto que esto puede suceder cuando los dígitos de N son 5, 3, 9, 2, 8 o 5, 3, 9, 4, 4.

Sin embargo, observa que el producto de 2 y 3 es 6. Por lo tanto, en lugar de usar los dígitos 5, 3, 9, 2, 8, podemos reemplazar los dos dígitos 2 y 3 con un solo dígito 6. Ahora tenemos los dígitos 6, 5, 8 y 9. El entero más pequeño que usa estos dígitos es 5689.

Es posible que podamos tomar un factor de 2 del 8 y un factor de 3 del 9 para hacer otro $2 \times 3 = 6$. Sin embargo, los dígitos ahora serán 5, 6, 6, 4 y 3. Esto significa que tendremos un número de cinco dígitos que es mayor que el número de cuatro dígitos 5689.

Problema de la Semana

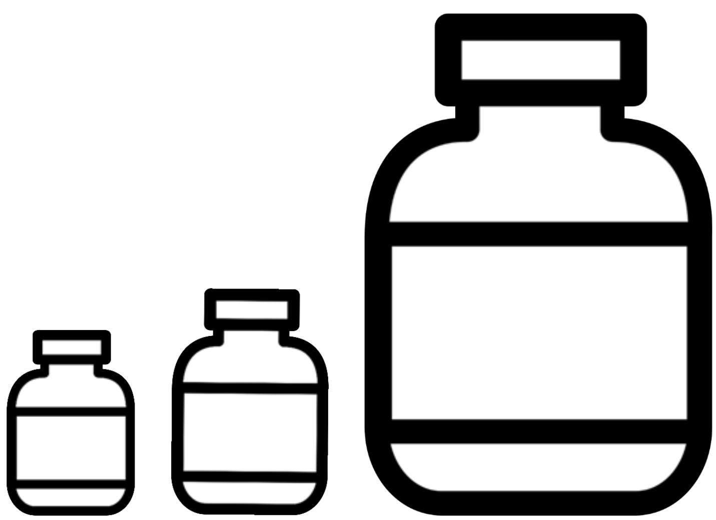
Problema D

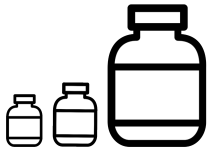
Tinte de Cabello

Una manera de crear un tinte de cabello es mezclar glicerina vegetal pura con agua para obtener una mezcla que es 12% de glicerina vegetal de volumen. Katty no tiene glicerina vegetal pura, pero sí tiene:

- Una mezcla de 90 mL que es 10.5% de glicerina vegetal,
- Una mezcla de 120 mL que es 30% de glicerina vegetal, y
- Una mezcla de 1 L que es 7.5% de glicerina vegetal.

Como Katty es profesora de matemáticas, sabe que puede usar el contenido de estas tres mezclas para crear una mezcla que es 12% de glicerina vegetal, por volumen. Combina el contenido de toda la mezcla de 90 mL con el contenido de toda la mezcla de 120 mL y luego agrega algo de la mezcla de 1 L. ¿Cuántos mililitros de la mezcla de 1 L debe agregar para crear una nueva mezcla que sea 12% de glicerina vegetal de volumen?





Problema de la Semana
Problema D y Solución
Tinte de Cabello

Problema

Una manera de crear un tinte de cabello es mezclar glicerina vegetal pura con agua para obtener una mezcla que es 12% de glicerina vegetal de volumen. Katty no tiene glicerina vegetal pura, pero sí tiene:

- Una mezcla de 90 mL que es 10.5% de glicerina vegetal,
- Una mezcla de 120 mL que es 30% de glicerina vegetal, y
- Una mezcla de 1 L que es 7.5% de glicerina vegetal.

Como Katty es profesora de matemáticas, sabe que puede usar el contenido de estas tres mezclas para crear una mezcla que es 12% de glicerina vegetal, por volumen. Combina el contenido de toda la mezcla de 90 mL con el contenido de toda la mezcla de 120 mL y luego agrega algo de la mezcla de 1 L. ¿Cuántos mililitros de la mezcla de 1 L debe agregar para crear una nueva mezcla que sea 12% de glicerina vegetal de volumen?

Solución

Sea x el número de mililitros necesarios de la mezcla de 1 L.

La mezcla de 90 mL que es 10.5% de glicerina vegetal tiene $0.105 \times 90 = 9.45$ mL de glicerina vegetal.

La mezcla de 120 mL que es 30% de glicerina vegetal tiene $0.30 \times 120 = 36$ mL de glicerina vegetal.

En los x mL de la mezcla de 1 L, hay $0.075 \times x = 0.075x$ mL de glicerina vegetal.

Por lo tanto, la cantidad total de glicerina vegetal en la nueva mezcla es $9,45 + 36 + 0,075x = (45,45 + 0,075x)$ mL.

La nueva mezcla contiene $90 + 120 + x = (210 + x)$ mL de líquido, de los cuales 12% es glicerina vegetal.
Por lo tanto, $0.12 \times (210 + x) = (25.2 + 0.12x)$ mL de la nueva mezcla es glicerina vegetal.

Como hemos demostrado que la cantidad de glicerina vegetal en la nueva mezcla es $(45.45 + 0.075x)$ mL y $(25.2 + 0.12x)$ mL, debemos tener

$$\begin{aligned}
45.45 + 0.075x &= 25.2 + 0.12x \\
0.075x - 0.12x &= 25.2 - 45.45 \\
-0.045x &= -20.25 \\
x &= 450
\end{aligned}$$

Por lo tanto, debe agregar 450 mL de la mezcla de 1 L que es 7.5% de glicerina vegetal.

Problema de la Semana

Problema D

Contando Empates

Hay cuatro equipos de softbol en una escuela, cada uno con un nombre de la vida silvestre local: Ardillas, Ardillas Listadas, Mapaches y Zarigüeyas.

Al final de la temporada, cada equipo había jugado contra todos los demás equipos exactamente cuatro veces. Un equipo gana 3 puntos por victoria, 1 punto por empate y ningún punto por derrota. El total de puntos ganados por cada equipo es el siguiente.

Nombre del equipo	Número total de puntos
Ardillas	12
Ardillas Listadas	14
Mapaches	19
Zarigüeyas	22

¿Cuántos de los partidos jugados en la temporada terminaron en empate?

Problema de la Semana

Problema D y Solución

Contando Empates

Problema

Hay cuatro equipos de softbol en una escuela, cada uno con un nombre de la vida silvestre local: Ardillas, Ardillas Listadas, Mapaches y Zarigüeyas.

Al final de la temporada, cada equipo había jugado contra todos los demás equipos exactamente cuatro veces. Un equipo gana 3 puntos por victoria, 1 punto por empate y ningún punto por derrota. El total de puntos ganados por cada equipo es el siguiente.

Nombre del equipo	Número total de puntos
Ardillas	12
Ardillas Listadas	14
Mapaches	19
Zarigüeyas	22

¿Cuántos de los partidos jugados en la temporada terminaron en empate?

Solución

Dado que cada equipo jugó contra todos los demás equipos cuatro veces, cada equipo jugó $3 \times 4 = 12$ juegos. Como hay cuatro equipos, se jugaron un total de $\frac{4 \times 12}{2} = 24$ juegos. Ten en cuenta que dividimos por 2 para no contar dos veces los juegos. Por ejemplo, las Ardillas jugando con las Zarigüeyas es lo mismo que las Zarigüeyas jugando con las Ardillas.

En los juegos donde un equipo ganó y otro equipo perdió, un equipo ganó 3 puntos y el otro equipo ganó 0 puntos, por lo que se otorgaron un total de 3 puntos. En los juegos que terminaron en empate, ambos equipos ganaron 1 punto, por lo que se otorgaron un total de 2 puntos.

Si no hubiera empates, entonces 24 juegos darían como resultado $24 \times 3 = 72$ puntos otorgados en total. Sin embargo, se otorgaron $12 + 14 + 19 + 22 = 67$ puntos en total. Dado que se otorgaron un total de 3 puntos cuando hubo una victoria y un total de 2 puntos cuando hubo un empate, cada juego de empate agrega un punto menos al número total de puntos que un juego donde hubo una victoria. De ello se deduce que cada punto por debajo de 72 debe representar un juego empatado. Dado que $72 - 67 = 5$, debe haber 5 juegos empatados.

Dado que se jugaron 24 juegos, $24 - 5 = 19$ juegos resultaron en una victoria. Debemos comprobar que existe una combinación de victorias, empates y derrotas que satisfaga las condiciones del problema. A continuación se muestra una posibilidad.

Nombre del equipo	# victorias	# empates	# derrotas	Total de puntos
Ardillas	3	3	6	12
Ardillas Listadas	3	5	4	14
Mapaches	6	1	5	19
Zarigüeyas	7	1	4	22
TOTAL	19	10	19	67

En la tabla, hay un total de 10 empates. Esto significa que 5 juegos terminaron en empate y se otorgaron un total de 10 puntos por empate.

Extensión: Hay 5 otras combinaciones de victorias, empates y derrotas que satisfacen las condiciones del problema. ¿Puedes encontrarlas todas?

Problema de la Semana

Problema D

Una y Otra Vez

Cuando la fracción $\frac{1}{70\,000\,000}$ se escribe como decimal, ¿qué dígito aparece en el 2023$^{\text{ésimo}}$ lugar después del punto decimal?

Problema de la Semana

Problema D y Solución

Una y Otra Vez

Problema

Cuando la fracción $\frac{1}{70\,000\,000}$ se escribe como decimal, ¿qué dígito aparece en el $2023^{\text{ésimo}}$ lugar después del punto decimal?

Solución

Notemos que $\frac{1}{70\,000\,000} = \frac{1}{10\,000\,000} \times \frac{1}{7} = 0.000\,000\,1 \times \frac{1}{7}$.

Además, ten en cuenta que $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$. Es decir, cuando $\frac{1}{7}$ se escribe como decimal, los dígitos después del punto decimal aparecen en bloques repetidos de los 6 dígitos 142857.

Por lo tanto,
$\frac{1}{70\,000\,000} = 0.000\,000\,1 \times \frac{1}{7} = 0.000\,000\,1 \times 0.\overline{142\,857} = 0.000\,000\,0\overline{14\,285\,7}$.
Es decir, cuando $\frac{1}{70\,000\,000}$ se escribe como decimal, los dígitos después del punto decimal serán siete ceros seguidos de bloques repetidos de seis dígitos 142857.

Vemos que la representación decimal de $\frac{1}{70\,000\,000}$ tiene la misma repetición que la de $\frac{1}{7}$, pero el patrón se desplaza 7 lugares. Por lo tanto, el $2023^{\text{ésimo}}$ dígito después del punto decimal cuando $\frac{1}{70\,000\,000}$ se escribe como decimal es el mismo que el $(2023 - 7) = 2016^{\text{ésimo}}$ dígito después del punto decimal cuando $\frac{1}{7}$ se escribe como decimal.

Dado que $\frac{2016}{6} = 336$, entonces el $2016^{\text{ésimo}}$ dígito después del punto decimal ocurre exactamente después de 336 bloques repetidos de 6 dígitos 142857. Por lo tanto, el $2016^{\text{ésimo}}$ dígito es el último dígito del bloque repetido, que es 7.

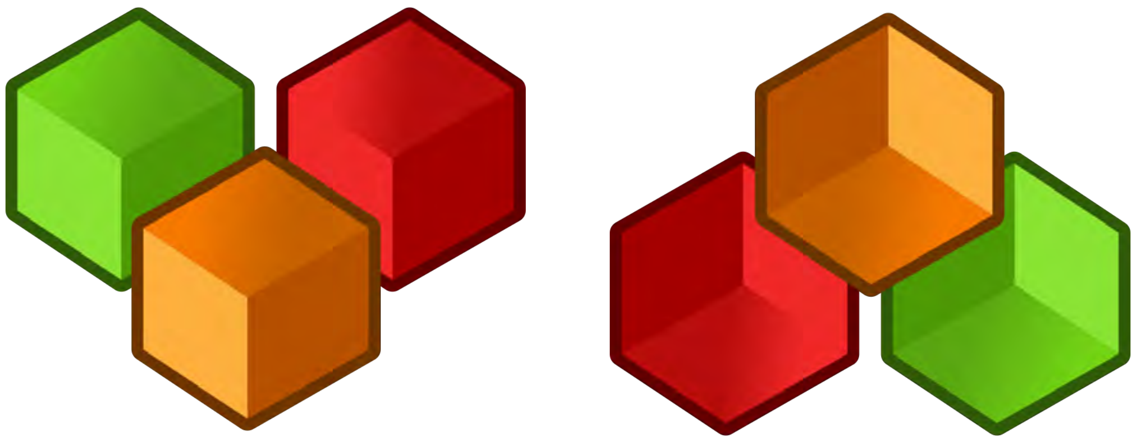
El $2023^{\text{ésimo}}$ dígito después del punto decimal en la representación decimal de $\frac{1}{70\,000\,000}$ es lo mismo que el $2016^{\text{ésimo}}$ dígito después del punto decimal en la representación decimal de $\frac{1}{7}$, y por lo tanto es 7.

Problema de la Semana

Problema D

Los Cubos de José

José tiene un cubo con un volumen de n cm^3. Cortaron este cubo en n cubos más pequeños, cada uno con una longitud de lado de 1 cm. El área de superficie total de los n cubos más pequeños es diez veces el área de superficie del cubo original de José. Determina la longitud del lado del cubo original de José.



Problema de la Semana
Problema D y Solución
Los Cubos de José

Problema

José tiene un cubo con un volumen de n cm^3. Cortaron este cubo en n cubos más pequeños, cada uno con una longitud de lado de 1 cm. El área de superficie total de los n cubos más pequeños es diez veces el área de superficie del cubo original de José. Determina la longitud del lado del cubo original de José.

Solución

Sea la longitud del lado del cubo original de José x cm, donde $x > 0$. De ello se deduce que $n = x^3$.

Cada uno de los seis lados del cubo original de José tiene un área de x^2 cm^2, por lo que el área de superficie total del cubo original es $6x^2$ cm^2.

Considere uno de los cubos más pequeños. El área de superficie de una de las seis caras es 1 cm^2. Entonces, el área de superficie de uno de estos cubos más pequeños es 6 cm^2. Por lo tanto, el área de superficie total de los n cubos más pequeños es $6n$ cm^2.

Dado que el área de superficie total de los cubos de n es diez veces el área de superficie del cubo original de José, tenemos

$$6n = 10(6x^2)$$

Dividiendo ambos lados por 6, tenemos

$$n = 10x^2$$

Pero $n = x^3$, entonces esto nos dice que

$$x^3 = 10x^2$$

Como $x > 0$, tenemos $x^2 > 0$. Dividiendo ambos lados por x^2, encontramos que $x = 10$.

Por lo tanto, la longitud del lado del cubo original de José era 10 cm.

Extensión:

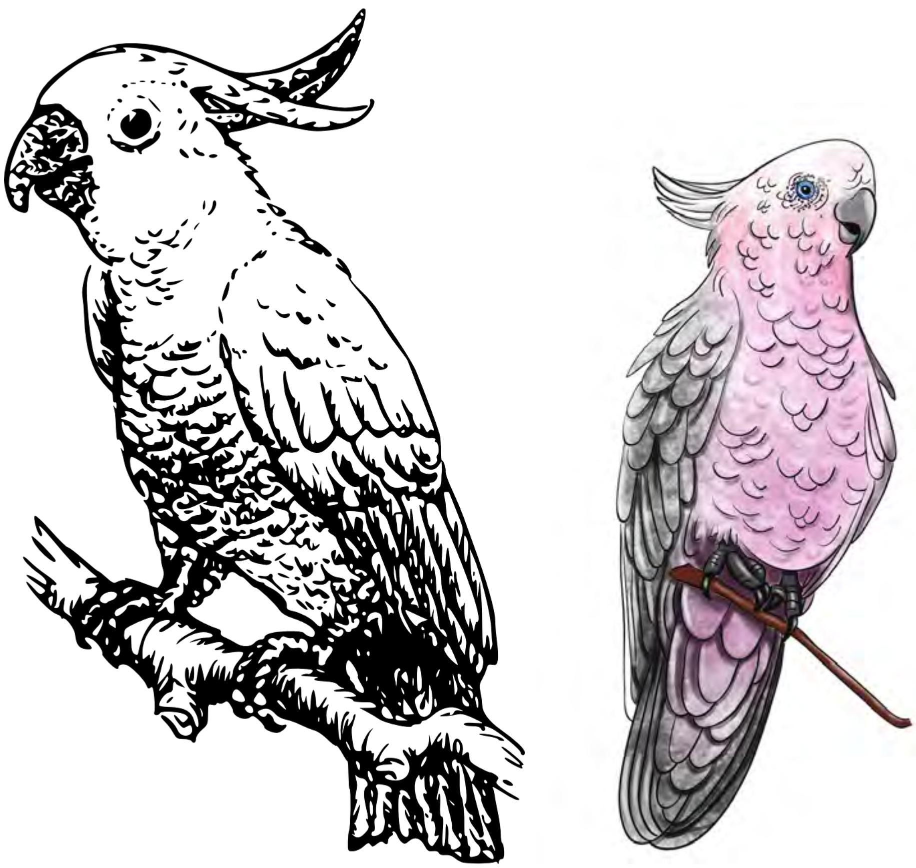
Si el área de superficie combinada de los n cubos con una longitud de lado de 1 cm fuera Q veces el área de superficie del cubo original sin cortar, entonces la longitud del lado del cubo original sin cortar habría sido Q cm. ¿Puedes ver por qué?

Problema de la Semana

Problema D

Dos Pájaros

Katty tiene dos pájaros, uno blanco y uno rosado. El pájaro blanco es mayor que el pájaro rosado. En la actualidad, la suma de las edades de los pájaros es 44 años. En n años, donde $n > 0$, la edad del pájaro blanco será cuatro veces la edad del pájaro rosado. Si n es un número entero, determine las posibles edades actuales de cada pájaro.



Problema de la Semana
Problema D y Solución
Dos Pájaros

Problema

Katty tiene dos pájaros, uno blanco y uno rosado. El pájaro blanco es mayor que el pájaro rosado. En la actualidad, la suma de las edades de los pájaros es 44 años. En n años, donde $n > 0$, la edad del pájaro blanco será cuatro veces la edad del pájaro rosado. Si n es un número entero, determine las posibles edades actuales de cada pájaro.

Solución

Sea b la edad actual del pájaro blanco y r la edad actual del pájaro rosado. Como la suma de sus edades actuales es 44, tenemos $b + r = 44$ o $r = 44 - b$.

En n años, el pájaro blanco tendrá $(b + n)$ años y el pájaro rosado $(44 - b + n)$ años. En ese momento el pájaro blanco será cuatro veces mayor que el pájaro rosado. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 4(b+n) &= 44 - b + n \\ 4b + 4n &= 44 - b + n \\ 5b + 3n &= 44 \\ b &= \frac{44 - 3n}{5} \end{aligned}$$

Estamos buscando valores enteros de n para que $44 - 3n$ sea divisible por 5.

Cuando $n = 3$, $b = \frac{44-3n}{5} = \frac{44-3(3)}{5} = \frac{35}{5} = 7$. Cuando $b = 7$, $r = 44 - b = 44 - 7 = 37$.

Cuando $n = 8$, $b = \frac{44-3n}{5} = \frac{44-3(8)}{5} = \frac{20}{5} = 4$. Cuando $b = 4$, $r = 44 - b = 44 - 4 = 40$.

Cuando $n = 13$, $b = \frac{44-3n}{5} = \frac{44-3(13)}{5} = \frac{5}{5} = 1$. Cuando $b = 1$, $r = 44 - b = 44 - 1 = 43$.

Cuando $n = 18$, $b = \frac{44-3n}{5} = \frac{44-3(18)}{5} = \frac{-10}{5} = -2$. Dado que $b < 0$, $n = 18$ no produce una edad válida para el pájaro blanco. Ningún valor mayor de n produciría un valor de $b > 0$.

Ningún valor entero de n entre 0 y 18, aparte de 3, 8 y 13, produce un múltiplo de 5 cuando se sustituye en $44 - 3n$.

Si hoy el pájaro blanco tiene 37 años y el pájaro rosado tiene 7 años, entonces en 3 años el pájaro blanco tendrá 40 años y el pájaro rosado tendrá 10 años. El pájaro blanco será cuatro veces mayor que el pájaro rosado ya que $4 \times 10 = 40$.

Si hoy el pájaro blanco tiene 40 años y el pájaro rosado tiene 4 años, entonces en 8 años el pájaro blanco tendrá 48 años y el pájaro rosado tendrá 12 años. El pájaro blanco será cuatro veces mayor que el pájaro rosado ya que $4 \times 12 = 48$.

Si hoy el pájaro blanco tiene 43 años y el pájaro rosado tiene 1 años, entonces en 13 años el pájaro blanco tendrá 56 años y el pájaro rosado tendrá 14 años. El pájaro blanco será cuatro veces mayor que el pájaro rosado ya que $4 \times 14 = 56$.

Por lo tanto, las posibles edades actuales para los pájaros blanco y rosado son 37 y 7, o 40 y 4, o 43 y 1, respectivamente.

Problema de la Semana

Problema D

Sin Cincos

Bob enumera los números enteros positivos, en orden, excluyendo todos los múltiplos de 5. Su lista resultante es

$$1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, \ldots$$

Si el n-ésimo entero en la lista de Bob es 2023, ¿cuál es el valor de n?

Problema de la Semana
Problema D y Solución
Sin Cincos

Problema
Bob enumera los números enteros positivos, en orden, excluyendo todos los múltiplos de 5. Su lista resultante es

$$1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, \ldots$$

Si el n-ésimo entero en la lista de Bob es 2023, ¿cuál es el valor de n?

Solución

Solución 1

Tengamos en cuenta que 2023 es tan solo dos números antes de 2025, que es un múltiplo de 5.
A partir del 1, 2025 es el 405-ésimo múltiplo de 5, ya que $\frac{2025}{5} = 405$. Es decir, los enteros del 1 a 2025 contienen 405 grupos de 5 enteros.
Cada uno de estos 405 grupos contiene un entero que es un múltiplo de 5, por lo que Bob omite 406 enteros (incluido 2024) en la lista de todos los enteros desde 1 hasta 2025. Si el n-ésimo entero en la lista de Bob es 2023, entonces $n = 2025 - 406 = 1619$.

Solución 2

Tengamos en cuenta que 2023 es tan solo dos números antes de 2025, que es un múltiplo de 5.
A partir de 1, 2025 es el 405-ésimo múltiplo de 5, ya que $\frac{2025}{5} = 405$. Es decir, los enteros del 1 a 2025 contienen 405 grupos de 5 enteros.
En la lista de enteros de Bob, él omite los enteros que son múltiplos de 5, y así en cada grupo de cinco enteros, Bob cuenta cuatro de estos enteros. Sin embargo, él tampoco cuenta 2024. Por lo tanto, si el n-ésimo entero en la lista de Bob es 2023, entonces $n = 405 \times 4 - 1 = 1619$.

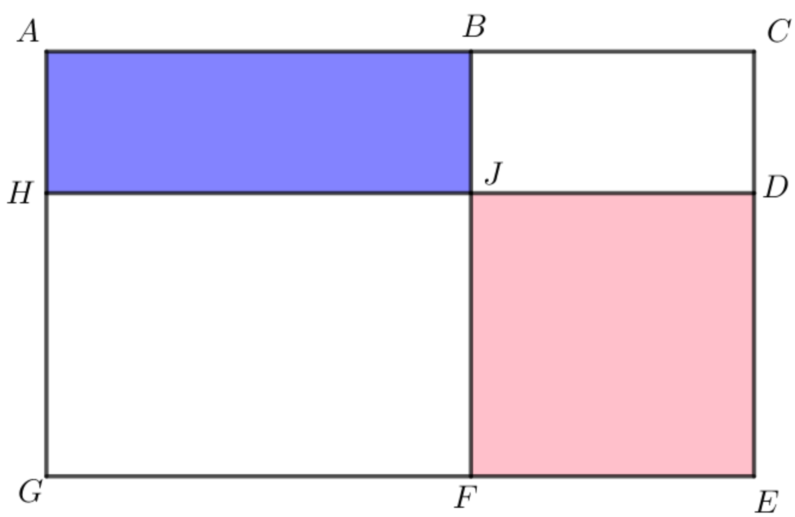
Problema de la Semana

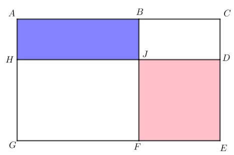
Problema D

Halla el Área Más Grande

El rectángulo $ACEG$ tiene B en AC y F en EG tal que BF es paralelo a CE. Además, D está en CE y H está en AG de modo que HD es paralelo a AC y BF intersecta a HD en J. El área del rectángulo $ABJH$ es 6 cm^2 y el área del rectángulo $JDEF$ es 15 cm^2.

Si las dimensiones de los rectángulos $ABJH$ y $JDEF$, en centímetros, son números enteros, determina el área más grande posible del rectángulo $ACEG$. Ten en cuenta que el diagrama es solo una ilustración y no pretende estar a escala.





Problema de la Semana

Problema D y Solución

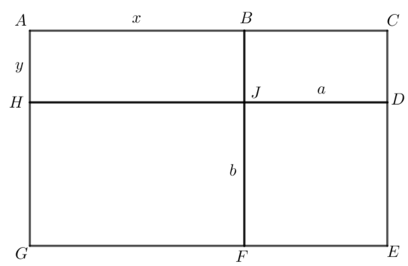
Halla el Área Más Grande

Problema

El rectángulo $ACEG$ tiene B en AC y F en EG tal que BF es paralelo a CE. Además, D está en CE y H está en AG de modo que HD es paralelo a AC y BF intersecta a HD en J. El área del rectángulo $ABJH$ es 6 cm^2 y el área del rectángulo $JDEF$ es 15 cm^2.

Si las dimensiones de los rectángulos $ABJH$ y $JDEF$, en centímetros, son números enteros, determina el área más grande posible del rectángulo $ACEG$.

Solución



Sea $AB = x$, $AH = y$, $JD = a$ and $JF = b$.
Entonces,

$$\begin{aligned} HJ &= GF = AB = x \\ BJ &= CD = AH = y \\ BC &= FE = JD = a \\ HG &= DE = JF = b \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} \text{área}(ACEG) &= \text{área}(ABJH) + \text{área}(BCDJ) + \text{área}(JDEF) + \text{área}(HJFG) \\ &= 6 + ya + 15 + xb \\ &= 21 + ya + xb \end{aligned}$$

Dado que el área del rectángulo $ABJH$ es 6 cm^2 y las longitudes de los lados de $ABJH$ son números enteros, entonces las longitudes de los lados deben ser 1 y 6 o 2 y 3. Es decir, $x = 1$ cm y $y = 6$ cm, $x = 6$ cm y $y = 1$ cm, $x = 2$ cm y $y = 3$ cm, o $x = 3$ cm y $y = 2$ cm.

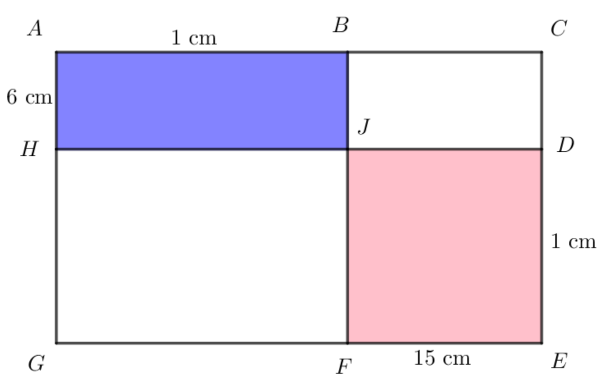
Dado que el área del rectángulo $JDEF$ es 15 cm^2 y las longitudes de los lados de $JDEF$ son números enteros, entonces las longitudes de los lados deben ser 1 y 15 o 3 y 5. Es decir, las opciones son: $a = 1$ cm y $b = 15$ cm, $a = 15$ cm y $b = 1$ cm, $a = 3$ cm y $b = 5$ cm, o $a = 5$ cm y $b = 3$ cm.

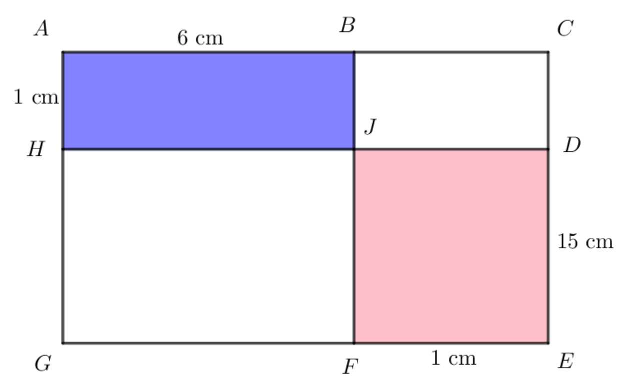
Para maximizar el área, debemos elegir los valores de x, y, a y b que hacen que $ya + xb$ sea lo más grande posible. Ahora dividiremos los casos según las posibles longitudes de los lados de $ABJH$ y $JDEF$ y calcularemos el área de $ACEG$ en cada caso. No necesitamos probar todos los 16 pares posibles, porque probar $x = 1$ cm y $y = 6$ cm con las cuatro posibilidades de a y b dará las mismas 4 áreas, en algún orden, como probar $x = 6$ cm y $y = 1$ cm con las cuatro posibilidades de a y b. De manera similar, intentar $x = 2$ cm y $y = 3$ cm con las cuatro posibilidades de a y b dará las mismas 4 áreas, en algún orden, que intentar $x = 3$ cm y $y = 2$ cm con las cuatro posibilidades de a y b. (Como ejercicio, analiza por qué esto es cierto).

- **Caso 1:** $x = 1$ cm, $y = 6$ cm, $a = 1$ cm, $b = 15$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 6(1) + 1(15) = 42$ cm^2.
- **Caso 2:** $x = 1$ cm, $y = 6$ cm, $a = 15$ cm, $b = 1$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 6(15) + 1(1) = 112$ cm^2.
- **Caso 3:** $x = 1$ cm, $y = 6$ cm, $a = 3$ cm, $b = 5$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 6(3) + 1(5) = 44$ cm^2.
- **Caso 4:** $x = 1$ cm, $y = 6$ cm, $a = 5$ cm, $b = 3$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 6(5) + 1(3) = 54$ cm^2.
- **Caso 5:** $x = 2$ cm, $y = 3$ cm, $a = 1$, $b = 15$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 3(1) + 2(15) = 54$ cm^2.
- **Caso 6:** $x = 2$ cm, $y = 3$ cm, $a = 15$, $b = 1$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 3(15) + 2(1) = 68$ cm^2.
- **Caso 7:** $x = 2$ cm, $y = 3$ cm, $a = 3$, $b = 5$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 3(3) + 2(5) = 40$ cm^2.
- **Caso 8:** $x = 2$ cm, $y = 3$ cm, $a = 5$, $b = 3$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 3(5) + 2(3) = 42$ cm^2.

Vemos que el área máxima es 112 cm^2, y ocurre cuando $x = 1$ cm, $y = 6$ cm y $a = 15$ cm, $b = 1$ cm. También ocurrirá cuando $x = 6$ cm, $y = 1$ cm y $a = 1$ cm, $b = 15$ cm.

Los siguientes diagramas muestran los valores calculados para x, y, a, b colocados en el diagrama original. ¡El diagrama dado en el problema definitivamente no fue dibujado a escala! Ambas soluciones producen rectángulos con dimensiones de 7 cm por 16 cm y un área de 112 cm^2.





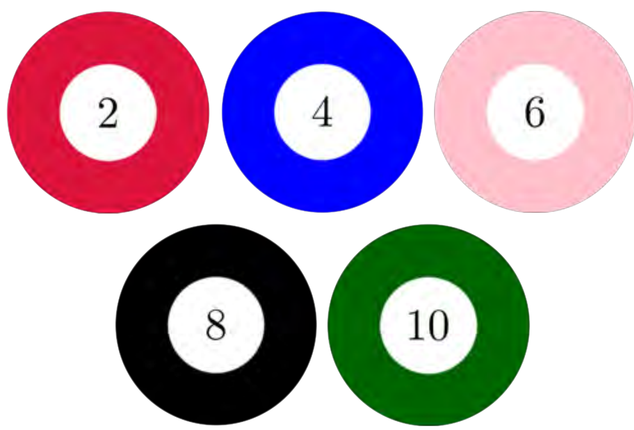
Problema de la Semana

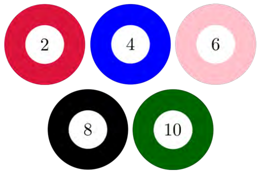
Problema D

Sin Potencias de 2

Se colocan cinco bolas en una bolsa. Cada bola está etiquetada con 2, 4, 6, 8 o 10, y ninguna bola tiene el mismo número que otra. Abigail elige una pelota al azar, anota el número entero de la pelota y vuelve a colocar la pelota en la bolsa. Luego, Bob elige una pelota al azar, anota el número entero en la pelota y vuelve a colocar la pelota en la bolsa. Finalmente, Carlos elige una pelota al azar, anota el número entero de la pelota y vuelve a colocar la pelota en la bolsa.

Determina la probabilidad de que el producto de los tres enteros anotados no sea una potencia de 2.





Problema de la Semana

Problema D y Solución

Sin Potencias de 2

Problema

Se colocan cinco bolas en una bolsa. Cada bola está etiquetada con 2, 4, 6, 8 o 10, y ninguna bola tiene el mismo número que otra. Abigail elige una pelota al azar, anota el número entero de la pelota y vuelve a colocar la pelota en la bolsa. Luego, Bob elige una pelota al azar, anota el número entero en la pelota y vuelve a colocar la pelota en la bolsa. Finalmente, Carlos elige una pelota al azar, anota el número entero de la pelota y vuelve a colocar la pelota en la bolsa. Determina la probabilidad de que el producto de los tres enteros anotados no sea una potencia de 2.

Solución

Solución 1

Una forma de resolver este problema es hacer una lista de todas las opciones posibles, calcular el producto de cada opción y luego contar la cantidad de productos que no son una potencia de 2. Si lo hiciéramos, encontraríamos que hay 125 opciones posibles. De estos, 98 dan como resultado un producto que no es una potencia de 2.

Por lo tanto, la probabilidad de que el producto no sea un producto de 2 es $\frac{98}{125}$. En las Soluciones 2 y 3, veremos formas más eficientes de calcular esta probabilidad.

Solución 2

Cuando se calcula el producto de los tres enteros, el producto es una potencia de 2 o no es una potencia de 2. Por lo tanto, para determinar el número de opciones que dan como resultado un producto que no es una potencia de 2, contaremos el número de opciones que dan como resultado un producto que es una potencia de 2 y lo restamos del número total de opciones.

Ya que Abigail, Bob y Carlos tienen cada uno cinco enteros posibles que pueden elegir, hay $5 \times 5 \times 5 = 125$ elecciones posibles de enteros. Para que el producto de los tres enteros sea una potencia de 2, no puede tener factores primos distintos de 2. En particular, esto significa que cada uno de los tres enteros elegidos debe ser una potencia de 2. Hay tres bolas etiquetadas con una potencia de 2: 2, 4 y 8. Por lo tanto, el número de opciones que resultan en una potencia de 2 es $3 \times 3 \times 3 = 27$.

Dado que hay 27 opciones que dan un producto que es una potencia de 2, deben haber $125 - 27 = 98$ opciones que dan un producto que no es una potencia de 2. Por lo tanto, la probabilidad de que el producto no sea una potencia de 2 es $\frac{98}{125}$.

Solución 3

Cuando se calcula el producto de los tres enteros, el producto es una potencia de 2 o no es una potencia de 2. Si p es la probabilidad de que el producto sea una potencia de 2 y q es la probabilidad de que el producto no sea una potencia de 2, entonces $p + q = 1$. Por lo tanto, podemos calcular q calculando p y notando que $q = 1 - p$.

Para que el producto de los tres enteros sea una potencia de 2, no puede tener factores primos distintos de 2. En particular, esto significa que cada uno de los tres enteros debe ser una potencia de 2. Hay tres bolas etiquetadas con una potencia de 2: 2, 4 y 8. Por lo tanto, la probabilidad de elegir al azar una pelota con una etiqueta que sea potencia de 2 es $\frac{3}{5}$. Como Abigail, Bob y Carlos eligen sus números enteros de forma independiente, entonces la probabilidad de que cada uno elija una potencia de 2 es $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$. En otras palabras, $p = \frac{27}{125}$, entonces $q = 1 - p = 1 - \frac{27}{125} = \frac{98}{125}$. Por lo tanto, la probabilidad de que el producto no sea una potencia de 2 es $\frac{98}{125}$.

Problema de la Semana

Problema D

Escala en el Camino

Un avión viaja de Calgary, Alberta a Grande Prairie, Alberta. El tiempo total de vuelo, incluido el despegue y el aterrizaje, es de 1 hora con 40 minutos. El vuelo de regreso toma la misma ruta y horario. La velocidad promedio de estos dos vuelos es de 500 km/h.

Después de una breve escala en Grande Prairie, la velocidad promedio de todo este viaje de ida y vuelta (incluidos los dos vuelos y la escala intermedia) se convierte en 425 km/h. ¿Cuánto duró la escala?

Problema de la Semana

Problema D y Solución

Escala en el Camino

Problema

Un avión viaja de Calgary, Alberta a Grande Prairie, Alberta. El tiempo total de vuelo, incluido el despegue y el aterrizaje, es de 1 hora con 40 minutos. El vuelo de regreso toma la misma ruta y horario. La velocidad promedio de estos dos vuelos es de 500 km/h.

Después de una breve escala en Grande Prairie, la velocidad promedio de todo este viaje de ida y vuelta (incluidos los dos vuelos y la escala intermedia) se convierte en 425 km/h. ¿Cuánto duró la escala?

Solución

Sea t la duración de la escala, en horas.

El avión viaja de Calgary a Grande Prairie en 1 hora 40 minutos a una velocidad de 500 km/h. Usando la fórmula distancia = velocidad × tiempo, la distancia de Calgary a Grande Prairie debe ser $500\frac{\text{km}}{\text{h}} \times 1\frac{2}{3}$ h $= 500 \times \frac{5}{3} = \frac{2500}{3}$ km.

Por lo tanto, para el viaje de ida y vuelta, el avión viaja $2 \times \frac{2500}{3} = \frac{5000}{3}$ km.

La duración del viaje completo de ida y vuelta es el tiempo de los dos vuelos más el tiempo de escala. Por lo tanto, la duración total del viaje es $\frac{5}{3} + \frac{5}{3} + t = \frac{10}{3} + t$ horas.

Dado que la velocidad promedio de todo el viaje de ida y vuelta es 425 km/h, usando la fórmula distancia = velocidad × tiempo, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{5000}{3} &= 425 \times \left(\frac{10}{3} + t\right) \\
\frac{10}{3} + t &= \frac{5000}{3 \times 425} \\
t &= \frac{200}{51} - \frac{10}{3} \\
&= \frac{200}{51} - \frac{170}{51} \\
&= \frac{10}{17}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la escala fue de $\frac{10}{17}$ horas, o aproximadamente 35 minutos.

Problema de la Semana

Problema D

¿Qué Hay en el Cuadrado?

Catorce cuadrados se colocan en una fila formando la cuadrícula de abajo. Cada cuadrado debe llenarse con un número entero positivo, de acuerdo con las siguientes reglas.

1. El producto de cuatro números enteros en cuadrados adyacentes es 120.
2. Los enteros pueden aparecer más de una vez en la cuadrícula.

Cuatro de los cuadrados ya están llenos con un número entero positivo, como se muestra. Determine todos los valores posibles de x.

		2			4			x			3		

Problema de la Semana

Problema D y Solución

¿Qué Hay en el Cuadrado?

Problema

Catorce cuadrados se colocan en una fila formando la cuadrícula de abajo. Cada cuadrado debe llenarse con un número entero positivo, de acuerdo con las siguientes reglas.

1. El producto de cuatro números enteros en cuadrados adyacentes es 120.
2. Los enteros pueden aparecer más de una vez en la cuadrícula.

Cuatro de los cuadrados ya están llenos con un número entero positivo, como se muestra. Determine todos los valores posibles de x.

		2			4			x			3		

Solución

En ambas soluciones, a_1 es el entero positivo en el primer cuadrado, a_2 es el entero positivo en el segundo cuadrado, a_3 es el entero positivo en el tercer cuadrado, a_4 es el entero positivo en el cuarto cuadrado, etcétera.

Solución 1

Considera los cuadrados del tercero al sexto. Como el producto de cuatro enteros adyacentes es 120, tenemos $2 \times a_4 \times a_5 \times 4 = 120$. Por lo tanto, $a_4 \times a_5 = \frac{120}{2\times4} = 15$. Como a_4 y a_5 son números enteros positivos, hay cuatro posibilidades: $a_4 = 1$ y $a_5 = 15$, o $a_4 = 15$ y $a_5 = 1$, o $a_4 = 3$ y $a_5 = 5$, o $a_4 = 5$ y $a_5 = 3$.

En cada uno de los cuatro casos tendremos $a_7 = 2$. Podemos ver por qué considerando los cuadrados del cuarto al séptimo. Tenemos $a_4 \times a_5 \times 4 \times a_7 = 120$, o $15 \times 4 \times a_7 = 120$, ya que $a_4 \times a_5 = 15$. Por lo tanto, $a_7 = \frac{120}{15\times4} = 2$.

- Caso 1: $a_4 = 1$ y $a_5 = 15$
  Considera los cuadrados del quinto al octavo. Tenemos $a_5 \times 4 \times a_7 \times a_8 = 120$, o $15 \times 4 \times 2 \times a_8 = 120$, o $a_8 = \frac{120}{15\times4\times2} = 1$.
  A continuación, considera los cuadrados del sexto al noveno. Tenemos $4 \times a_7 \times a_8 \times x = 120$, o $4 \times 2 \times 1 \times x = 120$, o $x = \frac{120}{4\times2} = 15$.
  Verifiquemos que $x = 15$ satisface la única otra condición en el problema que aún no hemos usado, es decir, $a_{12} = 3$.
  Considere cuadrados de 9 a 12. Si $x = 15$ y $a_{12} = 3$, entonces $a_{10} \times a_{11} = \frac{120}{15\times3} = \frac{8}{3}$. Pero a_{10} y a_{11} deben ser números enteros, por lo que no es posible para $a_{10} \times a_{11} = \frac{8}{3}$. Por lo tanto, no debe ser posible para $a_4 = 1$ y $a_5 = 15$, por lo que encontramos que no hay solución para x en este caso.

- Caso 2: $a_4 = 15$ y $a_5 = 1$
  Considera los cuadrados del quinto al octavo. Tenemos $a_5 \times 4 \times a_7 \times a_8 = 120$, o $1 \times 4 \times 2 \times a_8 = 120$, o $a_8 = \frac{120}{4\times 2} = 15$.
  A continuación, considera los cuadrados del sexto al noveno. Tenemos $4 \times a_7 \times a_8 \times x = 120$, o $x = \frac{120}{4\times 2\times 15} = 1$.
  Verifiquemos que $x = 1$ satisface la única otra condición en el problema que aún no hemos usado, es decir, $a_{12} = 3$.
  Considera los cuadrados del séptimo al décimo. Como $a_7 = 2$, $a_8 = 15$ y $x = 1$, entonces $a_{10} = \frac{120}{2\times 15\times 1} = 4$. De manera similar, $a_{11} = \frac{120}{15\times 1\times 4} = 2$. Entonces tenemos $x \times a_{10} \times a_{11} \times a_{12} = 1 \times 4 \times 2 \times 3 = 24 \neq 120$. Por lo tanto, no es posible para $a_4 = 15$ y $a_5 = 1$. No hay solución para x en este caso.

- Caso 3: $a_4 = 3$ y $a_5 = 5$
  Considera los cuadrados del quinto al octavo. Tenemos $a_5 \times 4 \times a_7 \times a_8 = 120$, o $5 \times 4 \times 2 \times a_8 = 120$, o $a_8 = \frac{120}{5\times 4\times 2} = 3$.
  A continuación, considera los cuadradoss del sexto al noveno. Tenemos $4 \times a_7 \times a_8 \times x = 120$, o $x = \frac{120}{4\times 2\times 3} = 5$.
  Verifiquemos que $x = 5$ satisface la única otra condición en el problema que aún no hemos usado, es decir, $a_{12} = 3$.
  Considera los cuadrados del séptimo al décimo. Como $a_7 = 2$, $a_8 = 3$ y $x = 5$, entonces $a_{10} = \frac{120}{2\times 3\times 5} = 4$. De manera similar, $a_{11} = \frac{120}{3\times 5\times 4} = 2$. Entonces tenemos $x \times a_{10} \times a_{11} \times a_{12} = 5 \times 4 \times 2 \times a_{12} = 120$, entonces $a_{12} = \frac{120}{5\times\times} = 3$. Por tanto, la condición de que $a_{12} = 3$ se cumple en el caso de que $a_4 = 3$ y $a_5 = 5$. Si continuamos llenando las entradas en los cuadrados, obtenemos las entradas que se muestran en el siguiente diagrama.

5	4	2	3	5	4	2	3	5	4	2	3	5	4

  Vemos que $x = 5$ es una posible solución. Sin embargo, ¿es la única solución? Tenemos un último caso para comprobar.

- Caso 4: $a_4 = 5$ y $a_5 = 3$
  Considera los cuadrados del quinto al octavo. Tenemos $a_5 \times 4 \times a_7 \times a_8 = 120$, o $3 \times 4 \times 2 \times a_8 = 120$, o $a_8 = \frac{120}{3\times 4\times 2} = 5$.
  A continuación, considera los cuadrados del sexto al noveno. Tenemos $4 \times a_7 \times a_8 \times x = 120$, o $x = \frac{120}{4\times 2\times 5} = 3$.
  Verifiquemos que $x = 3$ satisface la única otra condición en el problema que aún no hemos usado, es decir, $a_{12} = 3$.
  Considere cuadrados de 9 a 12. Si $x = 3$ y $a_{12} = 3$, entonces $a_{10} \times a_{11} = \frac{120}{3\times 3} = \frac{40}{3}$. Pero a_{10} y a_{11} deben ser números enteros, por lo que no es posible que $a_{10} \times a_{11} = \frac{40}{3}$. Por lo tanto, no debe ser posible para $a_4 = 5$ y $a_5 = 3$, por lo que encontramos que no hay solución para x en este caso.

Por lo tanto, el único valor posible para x es $x = 5$.

Solución 2

Es posible que haya notado un patrón para los a_i en la Solución 1. Exploraremos este patrón.

Como el producto de cuatro enteros adyacentes es 120, $a_1a_2a_3a_4 = a_2a_3a_4a_5 = 120$. Dado que ambos lados son divisibles por $a_2a_3a_4$, y cada uno es un número entero positivo, entonces $a_1 = a_5$.
Del mismo modo, $a_2a_3a_4a_5 = a_3a_4a_5a_6 = 120$, por lo que $a_2 = a_6$.
En general, $a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3} = a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}a_{n+4}$, y entonces $a_n = a_{n+4}$.
Podemos usar esto junto con la información dada para completar las entradas en los cuadrados de la siguiente manera:

x	4	2	3	x	4	2	3	x	4	2	3	x	4

Por lo tanto, $4 \times 2 \times 3 \times x = 120$ y entonces $x = \frac{120}{4\times2\times3} = 5$.

Problema de la Semana

Problema D

¿Cuántos Cincos?

El producto de los primeros siete enteros positivos es igual a

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

Los matemáticos escriben este producto como 7!. Esto se lee como “7 factorial”. Así que $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$.

Esta notación factorial se puede utilizar con cualquier número entero positivo. Por ejemplo, $11! = 11 \times 10 \times 9 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = 39\,916\,800$. Los tres puntos “$\cdots$” representan el producto de los enteros entre 9 y 3.

Supongamos que $N = 1000!$. Es decir,

$$N = 1000! = 1000 \times 999 \times 998 \times 997 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

Ten en cuenta que N es divisible por 5, 25, 125 y 625. Cada uno de estos factores es una potencia de 5. Es decir, $5 = 5^1$, $25 = 5^2$, $125 = 5^3$ y $625 = 5^4$.

Determina la mayor potencia de 5 que divide a N.

$5^{??}$

Problema de la Semana
Problema D y Solución
¿Cuántos Cincos?

Problema

El producto de los primeros siete enteros positivos es igual a

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

Los matemáticos escriben este producto como 7!. Esto se lee como "7 factorial". Así que $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$.

Esta notación factorial se puede utilizar con cualquier número entero positivo. Por ejemplo, $11! = 11 \times 10 \times 9 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = 39\,916\,800$. Los tres puntos "$\cdots$" representan el producto de los enteros entre 9 y 3.

Supongamos que $N = 1000!$. Es decir,

$$N = 1000! = 1000 \times 999 \times 998 \times 997 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

Ten en cuenta que N es divisible por 5, 25, 125 y 625. Cada uno de estos factores es una potencia de 5. Es decir, $5 = 5^1$, $25 = 5^2$, $125 = 5^3$ y $625 = 5^4$.

Determina la mayor potencia de 5 que divide a N.

Solución

Solución 1

Para determinar la mayor potencia de 5 que divide a N, necesitamos contar el número de veces que aparece el factor 5 en la descomposición en factores primos de N.

Dado que N es igual al producto de los enteros desde 1 hasta 1000, veamos primero cuáles de estos enteros son divisibles por 5. Los enteros de 1 a 1000 que son divisibles por 5 son $5, 10, 15, 20, \ldots, 990, 995, 1000$. Es decir, un total de $\frac{1000}{5} = 200$ enteros de 1 a 1000 son divisibles por 5.

Cada entero que sea múltiplo de 25 sumará un factor adicional de 5, ya que $25 = 5 \times 5$. Hay $\frac{1000}{25} = 40$ enteros de 1 a 1000 que son múltiplos de 25. Estos enteros dan otros 40 factores de 5, lo que hace que el total sea $200 + 40 = 240$.

Cada entero que sea múltiplo de 125 sumará un factor adicional de 5. Esto se debe a que $125 = 5 \times 5 \times 5$, y dos de los factores ya se contaron cuando analizamos 5 y 25. Hay $\frac{1000}{125} = 8$ enteros desde 1 hasta 1000 que son múltiplos de 125. Estos enteros dan otros 8 factores de 5, lo que eleva el total a $240 + 8 = 248$.

Cada entero que sea múltiplo de 625 sumará un factor adicional de 5. Esto se debe a que $625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5$, y tres de los factores ya se contaron cuando analizamos 5, 25 y 125. Hay 1 entero de 1 a 1000 que es un múltiplo de 625, es decir, 625. Este número entero da otro factor de 5, lo que hace que el total sea $248 + 1 = 249$.

La siguiente potencia de 5 es $5^5 = 3125 > 1000$, por lo que hemos contado todos los factores de 5 en 1000!.

Por lo tanto, la descomposición en factores primos de N contiene exactamente 249 factores de 5. Entonces, la mayor potencia de 5 que divide a N es 5^{249}.

Solución 2

Hay muchas similitudes entre la Solución 1 y la siguiente solución. En esta solución dividiremos factores de 5 hasta que no quede ninguno.

1. En los enteros de 1 a 1000, hay $\frac{1000}{5} = 200$ enteros que son divisibles por 5, los cuales son $5, 10, 15, \ldots, 990, 995, 1000$. Si dividimos cada uno de estos enteros por 5, obtenemos la segunda lista $1, 2, 3, \ldots, 198, 199, 200$.

2. Esta segunda lista contiene $\frac{200}{5} = 40$ enteros que son divisibles por 5, los cuales son $5, 10, 15, \ldots, 190, 195, 200$. Si dividimos cada uno de estos enteros por 5, obtenemos la tercera lista $1, 2, 3, \ldots, 38, 39, 40$.

3. Esta tercera lista contiene $\frac{40}{5} = 8$ enteros que son divisibles por 5, los cuales son $5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$. Si dividimos cada uno de estos enteros por 5, obtenemos la cuarta lista $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

4. Esta cuarta lista contiene 1 entero que es divisible por 5, es decir, el entero 5.

En total, hay $200 + 40 + 8 + 1 = 249$ factores de 5 en $1000!$. Por lo tanto, la mayor potencia de 5 que divide a N es 5^{249}.

Esta es una explicación de lo que sucede en esta solución. Cuando creamos la primera lista de múltiplos de 5, descubrimos que había 200 enteros desde 1 hasta 1000 que son divisibles por 5. Cuando creamos la segunda lista de múltiplos de 5, en realidad estábamos contando los enteros de 40 desde 1 hasta 1000 que son divisibles por 25. Cuando creamos la tercera lista de múltiplos de 5, en realidad estábamos contando los enteros de 8 desde 1 hasta 1000 que son divisibles por 125. Y finalmente, cuando creamos la cuarta lista de múltiplos de 5, en realidad estábamos contando el entero de 1 a 1000 que es divisible por 625.

Problema de la Semana

Problema D

Todo Mezclado

Un tazón grande contiene una mezcla de sal rosa del Himalaya y sal de mesa. Cuando se agrega 1 kg de sal de mesa al recipiente, la proporción, en masa, de sal rosa del Himalaya a sal de mesa se convierte en $1:2$. Cuando se agrega 1 kg de sal rosa del Himalaya a la nueva mezcla, la proporción se convierte en $2:3$. Encuentra la proporción de sal rosa del Himalaya y sal de mesa en la mezcla original.

Problema de la Semana

Problema D y Solución

Todo Mezclado

Problema

Un tazón grande contiene una mezcla de sal rosa del Himalaya y sal de mesa. Cuando se agrega 1 kg de sal de mesa al recipiente, la proporción, en masa, de sal rosa del Himalaya a sal de mesa se convierte en 1 : 2. Cuando se agrega 1 kg de sal rosa del Himalaya a la nueva mezcla, la proporción se convierte en 2 : 3. Encuentra la proporción de sal rosa del Himalaya y sal de mesa en la mezcla original.

Solución

Sea h la cantidad de sal rosa del Himalaya, en kgs, en la mezcla original.
Sea c la cantidad de sal de mesa, en kgs, en la mezcla original.

Cuando se agrega 1 kg de sal de mesa, la proporción de sal rosa del Himalaya a sal de mesa es 1 : 2. Por lo tanto,

$$\frac{h}{c+1} = \frac{1}{2}$$

Simplificando, obtenemos $c + 1 = 2h$, por lo que $c = 2h - 1$.

Cuando se agrega 1 kg de sal rosa del Himalaya a la nueva mezcla, la proporción se convierte en 2 : 3. Por lo tanto,

$$\frac{h+1}{c+1} = \frac{2}{3}$$

Como $c = 2h - 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{h+1}{(2h-1)+1} &= \frac{2}{3} \\
\frac{h+1}{2h} &= \frac{2}{3} \\
2(2h) &= 3(h+1) \\
4h &= 3h+3 \\
h &= 3
\end{aligned}$$

Sustituyendo $h = 3$ en $c = 2h - 1$, obtenemos $c = 2(3) - 1 = 5$.

Por lo tanto, originalmente había 3 kg de sal rosa del Himalaya en el recipiente y 5 kg de sal de mesa. Por lo tanto, la proporción de sal rosa del Himalaya a sal de mesa en la mezcla original era de 3 : 5.

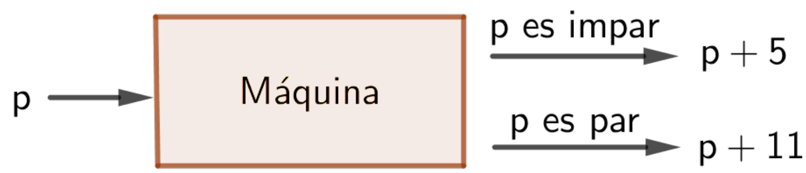
Problema de la Semana

Problema D

Máquina Matemática

Ingresamos un entero positivo p en una máquina. Si p es impar, la máquina genera el entero $p + 5$. Si p es par, la máquina genera el entero $p + 11$. Este proceso se puede repetir usando cada valor generado como siguiente entrada a la máquina. Por ejemplo, si la entrada es $p = 1$ y la máquina se usa tres veces, el valor final es 22.

Si la entrada es $p = 2023$ y la máquina se usa 101 veces, encuentra el valor final generado por la máquina.



Problema de la Semana

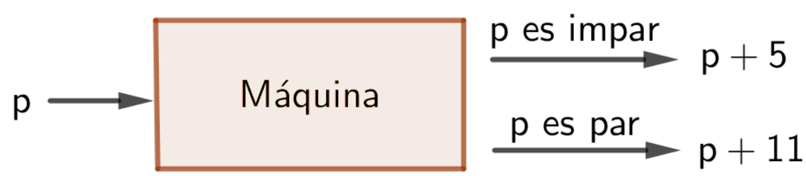
Problema D y Solución

Máquina Matemática

Problema

Ingresamos un entero positivo p en una máquina. Si p es impar, la máquina genera el entero $p + 5$. Si p es par, la máquina genera el entero $p + 11$. Este proceso se puede repetir usando cada valor generado como siguiente entrada a la máquina. Por ejemplo, si la entrada es $p = 1$ y la máquina se usa tres veces, el valor final es 22.

Si la entrada es $p = 2023$ y la máquina se usa 101 veces, encuentra el valor final generado por la máquina.



Solución

Si p es impar, el valor generado por la máquina es $p + 5$, que es par porque es la suma de dos enteros impares. Si p es par, el valor generado por la máquina es $p + 11$, que es impar, porque es la suma de un entero par y un entero impar.

Partiendo de $p = 2023$ y usando la máquina 2 veces, obtenemos $2023 + 5 = 2028$ y luego $2028 + 11 = 2039$.

Partiendo de 2039 y usando la máquina 2 veces, obtenemos $2039 + 5 = 2044$ y luego $2044 + 11 = 2055$.

Comenzando con un entero impar y usando la máquina 2 veces, el resultado neto siempre suma 16 a la entrada, porque la entrada impar genera un valor que es 5 más grande (y por tanto par) y al usar la máquina de nuevo genera un segundo valor que es 11 más grande que el primer valor generado. Esto nos da un resultado neto que es $5 + 11 = 16$ unidades mayor que la entrada.

Por lo tanto, usando la máquina 96 más veces (es decir, repitiendo los pasos de 2 en 2 un total de 48 más veces) sumamos 16 un total de 48 veces más para obtener $2055 + 48 \times 16 = 2823$. Hasta este punto, la máquina se ha usado 100 veces.

La próxima vez que se use la máquina, el resultado será $2823 + 5 = 2828$.

Por lo tanto, el valor final después de usar la máquina 101 veces es 2828.

Geometría y Medida (G)

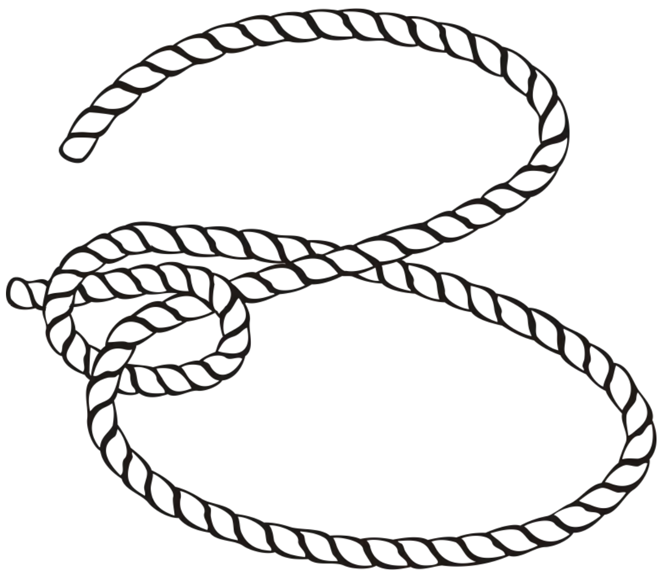
VOLVER
A LA
PORTADA

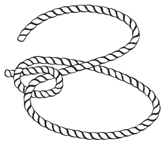
Problema de la Semana

Problema D

Tres Triángulos y un Cuadrado

Simón tiene una cuerda que mide 200 cm de largo. Él corta la cuerda en cuatro piezas para que con una de las piezas sea posible formar un cuadrado, con sus dos extremos tocándose, y con las tres piezas restantes se puedan formar tres triángulos equiláteros, cada uno con sus dos extremos tocándose. Si las cuatro figuras tienen longitudes de lado enteras, en cm, determine todas las posibilidades para las longitudes de lado de cada triángulo y el cuadrado.





Problema de la Semana

Problema D y Solución

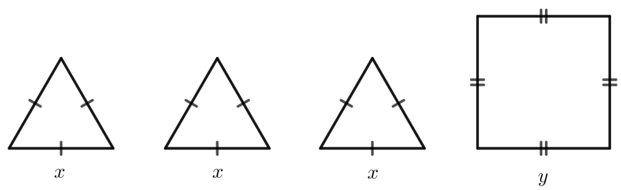
Tres Triángulos y un Cuadrado

Problema

Simón tiene una cuerda que mide 200 cm de largo. Él corta la cuerda en cuatro piezas para que con una de las piezas sea posible formar un cuadrado, con sus dos extremos tocándose, y con las tres piezas restantes se puedan formar tres triángulos equiláteros, cada uno con sus dos extremos tocándose. Si las cuatro figuras tienen longitudes de lado enteras, en cm, determine todas las posibilidades para las longitudes de lado de cada triángulo y el cuadrado.

Solución

Sea x la longitud del lado, en centímetros, de cada triángulo equilátero y sea y la longitud del lado, en centímetros, del cuadrado.



El perímetro de cada figura es la longitud del trozo de cuerda que se usó para formarla. Para cada triángulo, la longitud de la cuerda es $3x$ y para el cuadrado la longitud de la cuerda es $4y$. La cuerda total utilizada es $3(3x) + 4y = 9x + 4y$. Pero la longitud de la cuerda es 200 cm. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 9x + 4y &= 200 \\ 9x &= 200 - 4y \\ x &= \frac{4(50 - y)}{9} \end{aligned}$$

Sabemos que x y y son números enteros, y la información dada en el problema implica que x y y deben ser positivos. Dado que tanto x como y son números enteros, $4(50 - y)$ debe ser un múltiplo de 9. Pero 4 no es divisible por 9, por lo que $50 - y$ debe ser divisible por 9. Hay cinco múltiplos positivos de 9 entre 0 y 50: 9, 18, 27, 36 y 45. Entonces $50 - y$ debe ser igual a 9, 18, 27, 36 o 45. De ello se deduce que y es igual a 41, 32, 23, 14 o 5. Los valores correspondientes de x se calculan en la siguiente tabla.

y	$4y$	$200 - 4y$	$x = \frac{200-4y}{9}$
41	164	36	4
32	128	72	8
23	92	108	12
14	56	144	16
5	20	180	20

Consecuentemente, hay 5 posibilidades. Cuando la longitud del lado del cuadrado es 41 cm, la longitud del lado de cada triángulo es 4 cm; cuando la longitud del lado del cuadrado es 32 cm, la longitud del lado de cada triángulo es 8 cm; cuando la longitud del lado del cuadrado es 23 cm, la longitud del lado de cada triángulo es 12 cm; cuando la longitud del lado del cuadrado es 14 cm, la longitud del lado de cada triángulo es 16 cm; y cuando la longitud del lado del cuadrado es de 5 cm, la longitud del lado de cada triángulo es de 20 cm.

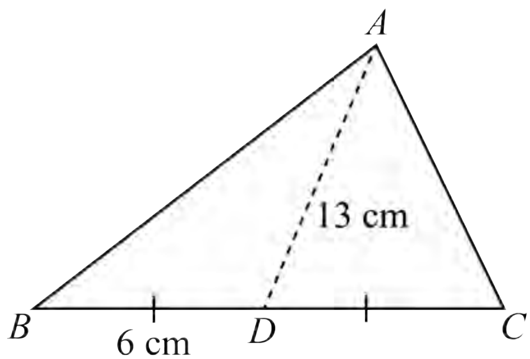
Problema de la Semana

Problema D

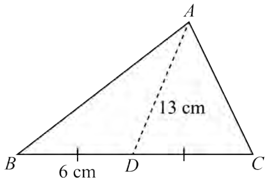
Dos Lados Conocidos

La *mediana* es un segmento de recta trazado desde el vértice de un triángulo hasta el punto medio de su lado opuesto.

En el $\triangle ABC$, se traza la mediana desde el vértice A, que toca al lado BC en el punto D. La longitud de BD es 6 cm y la longitud de la mediana AD es 13 cm.



El área del $\triangle ABC$ es 72 cm^2. Determina las longitudes de los lados AB y AC.



Problema de la Semana

Problema D y Solución

Dos Lados Conocidos

Problema

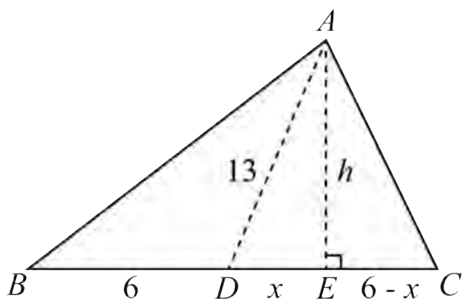
La *mediana* es un segmento de recta trazado desde el vértice de un triángulo hasta el punto medio de su lado opuesto.

En el $\triangle ABC$, se traza la mediana desde el vértice A, que toca al lado BC en el punto D. La longitud de BD es 6 cm y la longitud de la mediana AD es 13 cm.

El área del $\triangle ABC$ es 72 cm^2. Determina las longitudes de los lados AB y AC.

Solución

Primero vamos a trazar la altura desde el vértice A, que se encuentra con el lado BC en el punto E. Sea h la longitud de la altura AE. Sea x la longitud de DE. Como AD es una mediana, $DC = BD = 6$. Dado que E está en DC y la longitud de DE es x, la longitud de EC es $6 - x$.



Sabemos que el área del $\triangle ABC$ es 72 cm^2. Además, dado que $BD = DC = 6$ cm, se sigue que $BC = 12$ cm. De este modo,

$$\frac{BC \times AE}{2} = 72$$
$$\frac{12h}{2} = 72$$
$$h = 12$$

Puesto que $\triangle AED$ es un triángulo rectángulo, el Teorema de Pitágoras nos permite concluir lo siguiente.

$$DE^2 + AE^2 = AD^2$$
$$x^2 + 12^2 = 13^2$$
$$x^2 = 13^2 - 12^2$$
$$x^2 = 169 - 144 = 25$$

Como $x > 0$, tenemos que $x = 5$ cm. Así que $BE = 6 + x = 6 + 5 = 11$ cm y $EC = 6 - x = 6 - 5 = 1$ cm.

Puesto que $\triangle AEB$ es un triángulo rectángulo, el Teorema de Pitágoras nos permite concluir lo siguiente.

$$\begin{aligned} AE^2 + BE^2 &= AB^2 \\ 12^2 + 11^2 &= AB^2 \\ AB^2 &= 144 + 121 = 265 \end{aligned}$$

Como $AB > 0$, concluimos que $AB = \sqrt{265}$ cm.

Puesto que $\triangle AEC$ es un triángulo rectángulo, el Teorema de Pitágoras nos permite concluir lo siguiente.

$$\begin{aligned} AE^2 + EC^2 &= AC^2 \\ 12^2 + 1^2 &= AC^2 \\ AC^2 &= 144 + 1 = 145 \end{aligned}$$

Como $AB > 0$, concluimos que $AC = \sqrt{145}$ cm.

Por lo tanto, las longitudes de los lados AB y AC son $\sqrt{265}$ cm y $\sqrt{145}$ cm, respectivamente. Estas longitudes son aproximadamente iguales a 16.3 cm y 12.0 cm respectivamente.

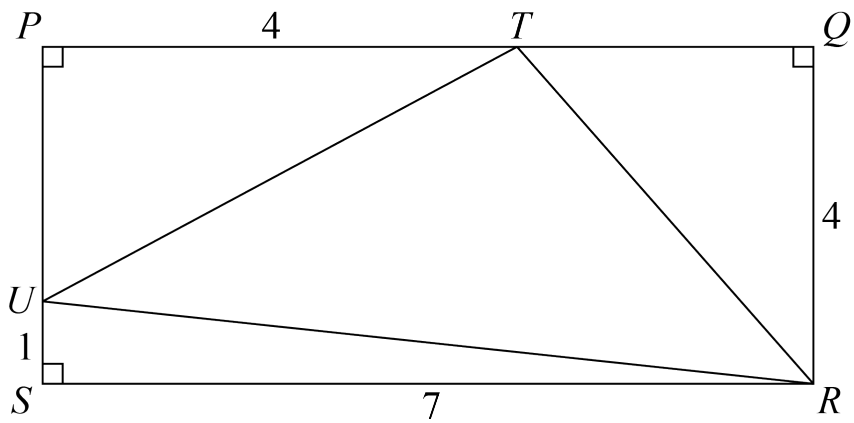
Problema de la Semana

Problema D

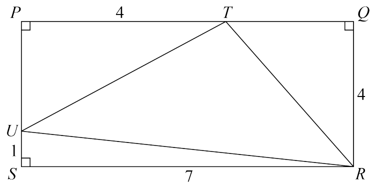
Muchas Maneras de Concluir

El rectángulo $PQRS$ tiene $QR = 4$ y $RS = 7$. El $\triangle TRU$ está inscrito en el rectángulo $PQRS$ con T en PQ tal que $PT = 4$, y U en PS tal que $SU = 1$.

Determina el valor de $\angle RUS + \angle PUT$.



Hay muchas maneras de resolver este problema. Después de haberlo resuelto, mira si puedes resolverlo de otra manera.



Problema de la Semana

Problema D y Solución

Muchas Maneras de Concluir

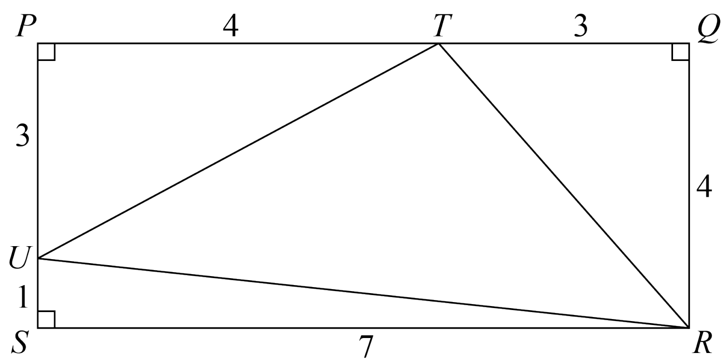
Problema

El rectángulo $PQRS$ tiene $QR = 4$ y $RS = 7$. El $\triangle TRU$ está inscrito en el rectángulo $PQRS$ con T en PQ tal que $PT = 4$, y U en PS tal que $SU = 1$.

Determina el valor de $\angle RUS + \angle PUT$. Hay muchas maneras de resolver este problema. Después de haberlo resuelto, mira si puedes resolverlo de otra manera.

Solución

Como $PQRS$ es un rectángulo, $PQ = RS$, entonces $TQ = 3$. Del mismo modo $PS = QR$, entonces $PU = 3$.



Ahora presentaremos tres soluciones diferentes. La primera usa el Teorema de Pitágoras, la segunda usa triángulos congruentes y la tercera usa trigonometría básica.

Solución 1

Como el $\triangle UPT$ tiene un ángulo recto en P, podemos aplicar el Teorema de Pitágoras para encontrar que $UT^2 = PU^2 + PT^2 = 3^2 + 4^2 = 25$. Por lo tanto, $UT = 5$, ya que $UT > 0$.

De manera similar, dado que el $\triangle TQR$ tiene un ángulo recto en Q, podemos aplicar el Teorema de Pitágoras para encontrar que $TR = 5$.

Como el $\triangle RSU$ tiene un ángulo recto en S, podemos aplicar el Teorema de Pitágoras para encontrar que $UR^2 = RS^2 + SU^2 = 7^2 + 1^2 = 50$ y así $UR = \sqrt{50}$, ya que $UR > 0$.

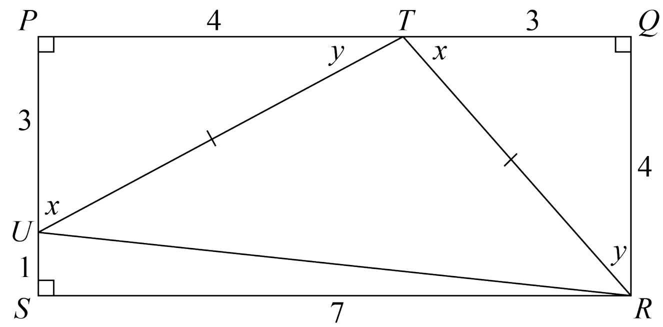
En el $\triangle TRU$, observa que $UT^2 + TR^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50 = UR^2$. Por lo tanto, $\triangle TRU$ es un triángulo rectángulo, con $\angle UTR = 90^\circ$. Además, dado que $UT = TR = 5$, $\triangle TRU$ es un triángulo rectángulo isósceles, entonces $\angle TUR = \angle TRU = 45^\circ$.

Los ángulos en línea recta suman 180°, por lo que tenemos $\angle RUS + \angle TUR + \angle PUT = 180^\circ$.

Dado que $\angle TUR = 45^\circ$, tenemos que $\angle RUS + 45^\circ + \angle PUT = 180^\circ$, y así $\angle RUS + \angle PUT = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Por lo tanto, $\angle RUS + \angle PUT = 135^\circ$.

Solución 2

En los triángulos $\triangle UPT$ y $\triangle TQR$, tenemos $PT = QR = 4$, $PU = TQ = 3$, y $\angle UPT = \angle TQR = 90°$. Por lo tanto $\triangle UPT \cong \triangle TQR$ por congruencia del triángulo lado-ángulo-lado. De la congruencia de triángulos se sigue que $UT = TR$, $\angle QTR = \angle PUT$, y $\angle TRQ = \angle PTU$. Sean $\angle QTR = \angle PUT = x$ y $\angle TRQ = \angle PTU = y$.



Dado que los ángulos en un triángulo suman 180°, en triángulo rectángulo $\triangle UPT$, $\angle PUT + \angle PTU = 90°$. Es decir, $x + y = 90°$.

Dado que los ángulos en línea recta suman 180°, $\angle PTU + \angle UTR + \angle QTR = 180°$. Es decir, $y + \angle UTR + x = 180°$. Sustituyendo $x + y = 90°$, obtenemos $90° + \angle UTR = 180°$, y concluimos que $\angle UTR = 90°$.

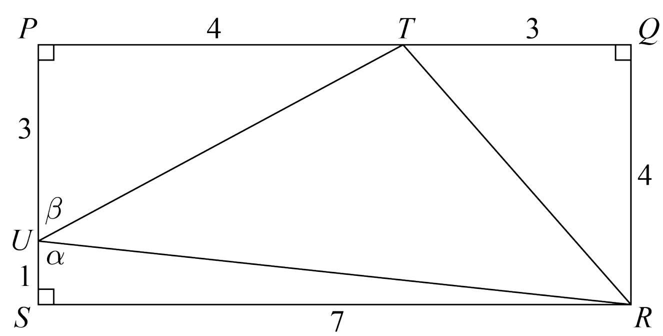
Dado que $UT = TR$ y $\angle UTR = 90°$, $\triangle TRU$ es un triángulo rectángulo isósceles y entonces $\angle TUR = \angle TRU = 45°$.

Los ángulos en línea recta suman 180°, por lo que tenemos $\angle RUS + \angle TUR + \angle PUT = 180°$.

Dado que $\angle TUR = 45°$, tenemos que $\angle RUS + 45° + \angle PUT = 180°$, y así $\angle RUS + \angle PUT = 180° - 45° = 135°$. Por lo tanto, $\angle RUS + \angle PUT = 135°$.

Solución 3

Sean $\angle RUS = \alpha$ y $\angle PUT = \beta$.



Usando trigonometría básica, a partir del triángulo rectángulo $\triangle RSU$, tenemos $\tan\alpha = \frac{7}{1} = 7$, y entonces $\alpha = \tan^{-1}(7)$. De manera similar, a partir del $\triangle UPT$ de ángulo recto, tenemos $\tan\beta = \frac{4}{3}$, y así $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$.

Entonces $\angle RUS + \angle PUT = \alpha + \beta = \tan^{-1}(7) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 135°$.

Por lo tanto, $\angle RUS + \angle PUT = 135°$.

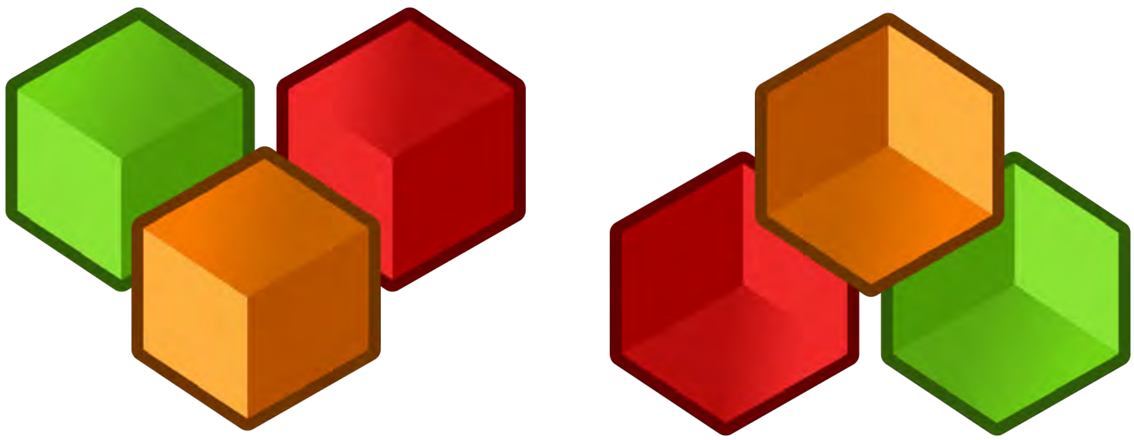
Esta tercera solución es muy eficiente y concisa. Sin embargo, parte de la belleza se pierde como resultado de esta solución directa.

Problema de la Semana

Problema D

Los Cubos de José

José tiene un cubo con un volumen de n cm^3. Cortaron este cubo en n cubos más pequeños, cada uno con una longitud de lado de 1 cm. El área de superficie total de los n cubos más pequeños es diez veces el área de superficie del cubo original de José. Determina la longitud del lado del cubo original de José.



Problema de la Semana

Problema D y Solución

Los Cubos de José

Problema

José tiene un cubo con un volumen de n cm^3. Cortaron este cubo en n cubos más pequeños, cada uno con una longitud de lado de 1 cm. El área de superficie total de los n cubos más pequeños es diez veces el área de superficie del cubo original de José. Determina la longitud del lado del cubo original de José.

Solución

Sea la longitud del lado del cubo original de José x cm, donde $x > 0$. De ello se deduce que $n = x^3$.

Cada uno de los seis lados del cubo original de José tiene un área de x^2 cm^2, por lo que el área de superficie total del cubo original es $6x^2$ cm^2.

Considere uno de los cubos más pequeños. El área de superficie de una de las seis caras es 1 cm^2. Entonces, el área de superficie de uno de estos cubos más pequeños es 6 cm^2. Por lo tanto, el área de superficie total de los n cubos más pequeños es $6n$ cm^2.

Dado que el área de superficie total de los cubos de n es diez veces el área de superficie del cubo original de José, tenemos

$$6n = 10(6x^2)$$

Dividiendo ambos lados por 6, tenemos

$$n = 10x^2$$

Pero $n = x^3$, entonces esto nos dice que

$$x^3 = 10x^2$$

Como $x > 0$, tenemos $x^2 > 0$. Dividiendo ambos lados por x^2, encontramos que $x = 10$.

Por lo tanto, la longitud del lado del cubo original de José era 10 cm.

Extensión:

Si el área de superficie combinada de los n cubos con una longitud de lado de 1 cm fuera Q veces el área de superficie del cubo original sin cortar, entonces la longitud del lado del cubo original sin cortar habría sido Q cm. ¿Puedes ver por qué?

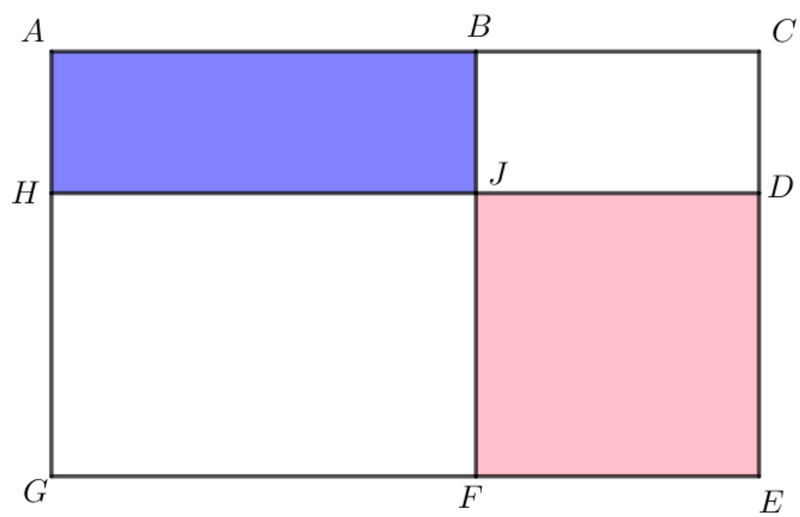
Problema de la Semana

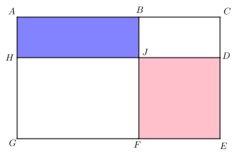
Problema D

Halla el Área Más Grande

El rectángulo $ACEG$ tiene B en AC y F en EG tal que BF es paralelo a CE. Además, D está en CE y H está en AG de modo que HD es paralelo a AC y BF intersecta a HD en J. El área del rectángulo $ABJH$ es 6 cm^2 y el área del rectángulo $JDEF$ es 15 cm^2.

Si las dimensiones de los rectángulos $ABJH$ y $JDEF$, en centímetros, son números enteros, determina el área más grande posible del rectángulo $ACEG$. Ten en cuenta que el diagrama es solo una ilustración y no pretende estar a escala.





Problema de la Semana

Problema D y Solución

Halla el Área Más Grande

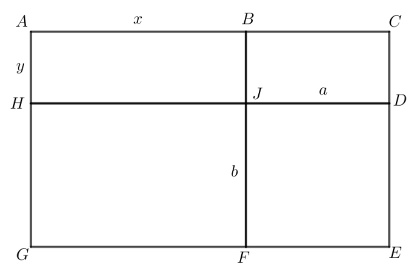
Problema

El rectángulo $ACEG$ tiene B en AC y F en EG tal que BF es paralelo a CE. Además, D está en CE y H está en AG de modo que HD es paralelo a AC y BF intersecta a HD en J. El área del rectángulo $ABJH$ es 6 cm^2 y el área del rectángulo $JDEF$ es 15 cm^2.

Si las dimensiones de los rectángulos $ABJH$ y $JDEF$, en centímetros, son números enteros, determina el área más grande posible del rectángulo $ACEG$.

Solución

Sea $AB = x$, $AH = y$, $JD = a$ and $JF = b$.
Entonces,



$$HJ = GF = AB = x$$
$$BJ = CD = AH = y$$
$$BC = FE = JD = a$$
$$HG = DE = JF = b$$

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} \text{área}(ACEG) &= \text{área}(ABJH) + \text{área}(BCDJ) + \text{área}(JDEF) + \text{área}(HJFG) \\ &= 6 + ya + 15 + xb \\ &= 21 + ya + xb \end{aligned}$$

Dado que el área del rectángulo $ABJH$ es 6 cm^2 y las longitudes de los lados de $ABJH$ son números enteros, entonces las longitudes de los lados deben ser 1 y 6 o 2 y 3. Es decir, $x = 1$ cm y $y = 6$ cm, $x = 6$ cm y $y = 1$ cm, $x = 2$ cm y $y = 3$ cm, o $x = 3$ cm y $y = 2$ cm.

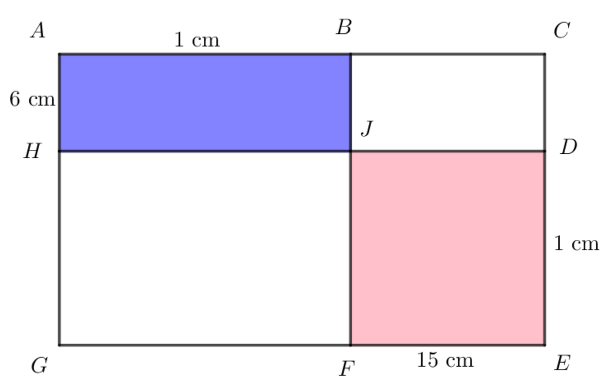
Dado que el área del rectángulo $JDEF$ es 15 cm^2 y las longitudes de los lados de $JDEF$ son números enteros, entonces las longitudes de los lados deben ser 1 y 15 o 3 y 5. Es decir, las opciones son: $a = 1$ cm y $b = 15$ cm, $a = 15$ cm y $b = 1$ cm, $a = 3$ cm y $b = 5$ cm, o $a = 5$ cm y $b = 3$ cm.

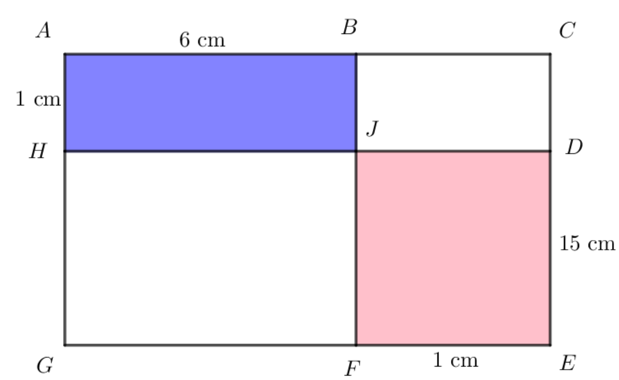
Para maximizar el área, debemos elegir los valores de x, y, a y b que hacen que $ya + xb$ sea lo más grande posible. Ahora dividiremos los casos según las posibles longitudes de los lados de $ABJH$ y $JDEF$ y calcularemos el área de $ACEG$ en cada caso. No necesitamos probar todos los 16 pares posibles, porque probar $x = 1$ cm y $y = 6$ cm con las cuatro posibilidades de a y b dará las mismas 4 áreas, en algún orden, como probar $x = 6$ cm y $y = 1$ cm con las cuatro posibilidades de a y b. De manera similar, intentar $x = 2$ cm y $y = 3$ cm con las cuatro posibilidades de a y b dará las mismas 4 áreas, en algún orden, que intentar $x = 3$ cm y $y = 2$ cm con las cuatro posibilidades de a y b. (Como ejercicio, analiza por qué esto es cierto).

- **Caso 1:** $x = 1$ cm, $y = 6$ cm, $a = 1$ cm, $b = 15$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 6(1) + 1(15) = 42$ cm^2.
- **Caso 2:** $x = 1$ cm, $y = 6$ cm, $a = 15$ cm, $b = 1$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 6(15) + 1(1) = 112$ cm^2.
- **Caso 3:** $x = 1$ cm, $y = 6$ cm, $a = 3$ cm, $b = 5$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 6(3) + 1(5) = 44$ cm^2.
- **Caso 4:** $x = 1$ cm, $y = 6$ cm, $a = 5$ cm, $b = 3$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 6(5) + 1(3) = 54$ cm^2.
- **Caso 5:** $x = 2$ cm, $y = 3$ cm, $a = 1$, $b = 15$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 3(1) + 2(15) = 54$ cm^2.
- **Caso 6:** $x = 2$ cm, $y = 3$ cm, $a = 15$, $b = 1$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 3(15) + 2(1) = 68$ cm^2.
- **Caso 7:** $x = 2$ cm, $y = 3$ cm, $a = 3$, $b = 5$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 3(3) + 2(5) = 40$ cm^2.
- **Caso 8:** $x = 2$ cm, $y = 3$ cm, $a = 5$, $b = 3$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 3(5) + 2(3) = 42$ cm^2.

Vemos que el área máxima es 112 cm^2, y ocurre cuando $x = 1$ cm, $y = 6$ cm y $a = 15$ cm, $b = 1$ cm. También ocurrirá cuando $x = 6$ cm, $y = 1$ cm y $a = 1$ cm, $b = 15$ cm.

Los siguientes diagramas muestran los valores calculados para x, y, a, b colocados en el diagrama original. ¡El diagrama dado en el problema definitivamente no fue dibujado a escala! Ambas soluciones producen rectángulos con dimensiones de 7 cm por 16 cm y un área de 112 cm^2.



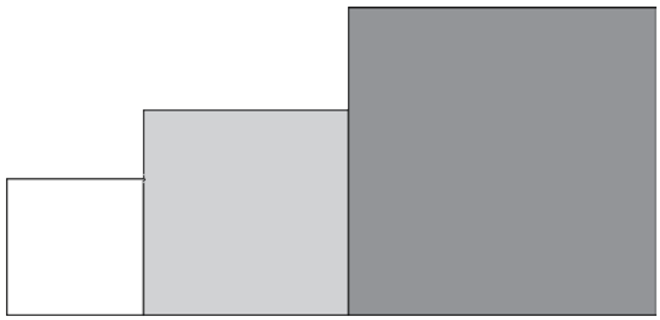


Problema de la Semana

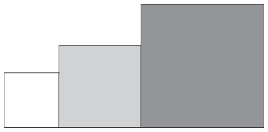
Problema D

El Cuadrado Más Grande

Se colocan tres cuadrados uno al lado del otro con el cuadrado más pequeño a la izquierda y el cuadrado más grande a la derecha. Los lados inferiores de los tres cuadrados forman una línea horizontal.



La longitud del lado del cuadrado más pequeño es 5 unidades, y la longitud del lado del cuadrado mediano es 8 unidades. Si la esquina superior izquierda de cada cuadrado está en línea recta, determina la longitud del lado del cuadrado más grande.



Problema de la Semana

Problema D y Solución

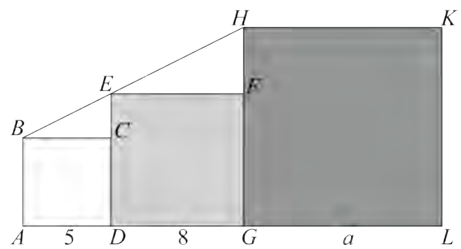
El Cuadrado Más Grande

Problema

Se colocan tres cuadrados uno al lado del otro con el cuadrado más pequeño a la izquierda y el cuadrado más grande a la derecha. Los lados inferiores de los tres cuadrados forman una línea horizontal. La longitud del lado del cuadrado más pequeño es 5 unidades, y la longitud del lado del cuadrado mediano es 8 unidades. Si la esquina superior izquierda de cada cuadrado está en línea recta, determina la longitud del lado del cuadrado más grande.

Solución

Primero dibujamos un segmento de línea que conecta la esquina superior izquierda de cada cuadrado y etiquetamos los vértices como se muestra en el diagrama. Decimos que a es la longitud del lado del cuadrado más grande.



Presentamos tres soluciones diferentes.

En la Solución 1, resolvemos el problema calculando la pendiente de BH. En la Solución 2, resolvemos el problema usando triángulos semejantes. En la Solución 3, colocamos el diagrama en el plano xy y resolvemos el problema usando geometría analítica.

Solución 1

La pendiente de una recta es igual a su cambio vertical dividido por su cambio horizontal. Si miramos el segmento de línea de B a E, $BC = 5$ y $CE = DE - DC = 8 - 5 = 3$. Por lo tanto, la pendiente de BE es $\frac{CE}{BC} = \frac{3}{5}$.

En el segmento de recta de E a H, $EF = 8$ y $FH = GH - GF = a - 8$. Por lo tanto, la pendiente EH es $\frac{FH}{EF} = \frac{a-8}{8}$.

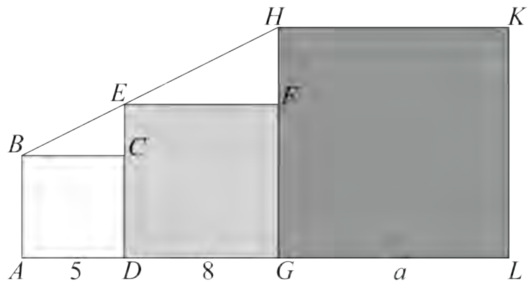
Dado que B, E, y H se encuentran en una línea recta, la pendiente de BE debe ser igual a la pendiente de EH. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{3}{5} &= \frac{a-8}{8} \\
5(a-8) &= 3(8) \\
5a - 40 &= 24 \\
5a &= 64 \\
a &= \frac{64}{5}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la longitud del lado del cuadrado más grande es $\frac{64}{5}$ unidades.

Solución 2

Considera el $\triangle BCE$ y $\triangle EFH$. Primero mostraremos que $\triangle BCE \sim \triangle EFH$.



Como $ABCD$ es un cuadrado, $\angle BCD = 90°$. Por lo tanto, $\angle BCE = 180° - \angle BCD = 180° - 90° = 90°$. Como $DEFG$ es un cuadrado, $\angle EFG = 90°$. Por lo tanto, $\angle EFH = 180° - \angle EFG = 180° - 90° = 90°$. Consecuentemente, $\angle BCE = \angle EFH$.

Como $ABCD$ y $DEFG$ son cuadrados y AG es una línea recta, BC es paralela a EF. Por lo tanto, $\angle EBC$ y $\angle HEF$ son ángulos correspondientes y entonces $\angle EBC = \angle HEF$.

Dado que los ángulos en un triángulo suman $180°$, entonces también debemos tener $\angle BEC = \angle EHF$.

Entonces, $\triangle BCE \sim \triangle EFH$, por semejanza de triángulo ángulo-ángulo-ángulo.

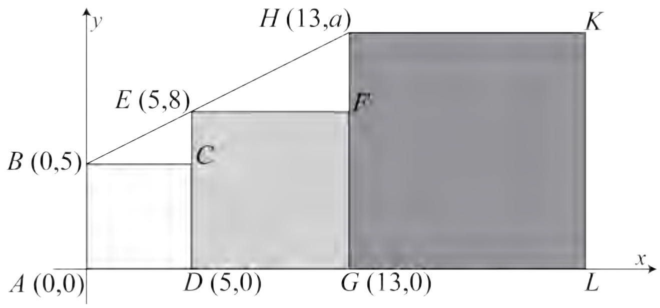
Dado que $\triangle BCE \sim \triangle EFH$, las longitudes de los lados correspondientes son proporcionales. En particular,

$$\begin{aligned}
\frac{EC}{BC} &= \frac{HF}{EF}\\
\frac{DE-DC}{BC} &= \frac{GH-GF}{EF}\\
\frac{8-5}{5} &= \frac{a-8}{8}\\
\frac{3}{5} &= \frac{a-8}{8}\\
5(a-8) &= 3(8)\\
5a-40 &= 24\\
5a &= 64\\
a &= \frac{64}{5}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la longitud del lado del cuadrado más grande es $\frac{64}{5}$ unidades.

Solución 3

Empezamos colocando el diagrama en el plano xy con A en $(0,0)$ y AL a lo largo del eje x.



Las coordenadas de B son $(0,5)$, las coordenadas de D son $(5,0)$, las coordenadas de E son $(5,8)$, las coordenadas de G son $(13,0)$, y las coordenadas de H son $(13,a)$.

Vamos a determinar la ecuación de la recta que pasa por B, E y H.

Como esta recta pasa por $(0,5)$, debe de tener un punto de intersección con y de 5 unidades. Como la recta pasa por $(0,5)$ y $(5,8)$, tiene una pendiente de $\frac{8-5}{5-0}=\frac{3}{5}$. Por lo tanto, la ecuación de la recta que pasa por B, E y H es $y=\frac{3}{5}x+5$.

Como $H(13,a)$ se encuentra en esta línea, sustituyendo $x=13$ y $y=a$ en $y=\frac{3}{5}x+5$ nos da

$$a=\frac{3}{5}(13)+5=\frac{39}{5}+5=\frac{39+25}{5}=\frac{64}{5}$$

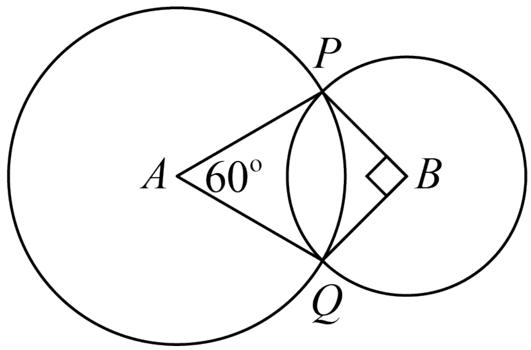
Por lo tanto, la longitud del lado del cuadrado más grande es $\dfrac{64}{5}$ unidades.

Problema de la Semana

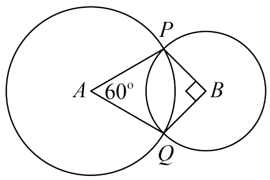
Problema D

La Otra Área

Dos circunferencias, una de centro A y otra de centro B, se cortan en los puntos P y Q tales que $\angle PAQ = 60^\circ$ y $\angle PBQ = 90^\circ$.



Si el área del círculo con centro A es $48\,\mathrm{m}^2$, ¿cuál es el área del círculo con centro B?



Problema de la Semana

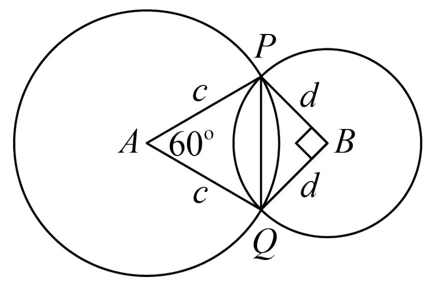
Problema D y Solución

La Otra Área

Problema

Dos circunferencias, una de centro A y otra de centro B, se cortan en los puntos P y Q tales que $\angle PAQ = 60^\circ$ y $\angle PBQ = 90^\circ$. Si el área del círculo con centro A es $48\,\text{m}^2$, ¿cuál es el área del círculo con centro B?

Solución



Sean c el radio de la circunferencia de centro A, en metros, y d el radio de la circunferencia de centro B, en metros. Unimos P a Q. Determinaremos la longitud de PQ en términos de c y luego en términos de d para encontrar una relación entre c y d.

Consideramos $\triangle APQ$. Como $AP = AQ = c$, $\triangle APQ$ es isósceles y por lo tanto $\angle APQ = \angle AQP$. El problema dice que $\angle PAQ = 60^\circ$, $\angle APQ = \angle AQP = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$. Por lo tanto, $\triangle APQ$ es equilátero y $PQ = AP = AQ = c$.

Consideramos $\triangle BPQ$. El problema dice que $\angle PBQ = 90^\circ$. Por lo tanto, $\triangle BPQ$ es un triángulo rectángulo. El teorema de Pitágoras nos dice que $PQ^2 = BP^2 + BQ^2 = d^2 + d^2 = 2d^2$.

Tenemos $PQ = c$ y $PQ^2 = 2d^2$. Por lo tanto, $c^2 = 2d^2$.

El área del círculo con centro B y radio d es πd^2.

El área del círculo con centro A y radio c es πc^2. Sabemos que esta área es igual a $48\,\text{m}^2$. Entonces,

$$\begin{aligned} 48 &= \pi c^2 \\ 48 &= \pi(2d^2) \\ 48 &= 2\pi d^2 \\ 24 &= \pi d^2 \end{aligned}$$

Por tanto, el área del círculo de centro B es $24\,\text{m}^2$.

Problema de la Semana

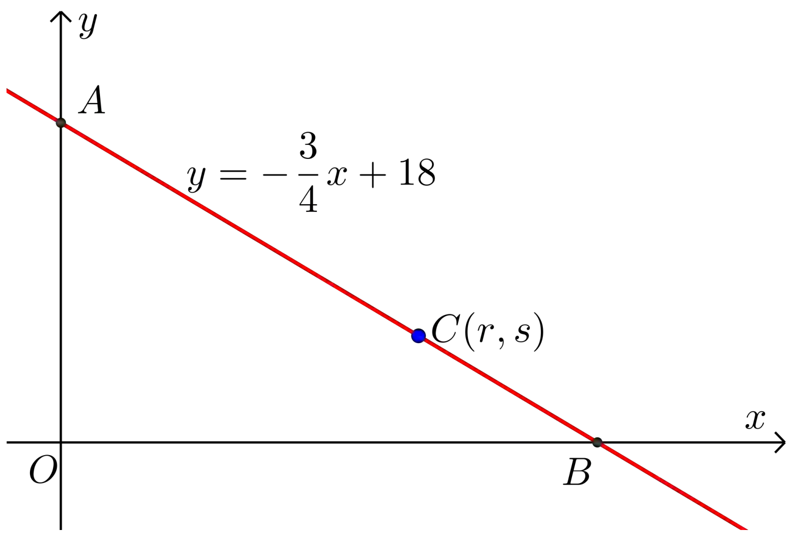
Problema D

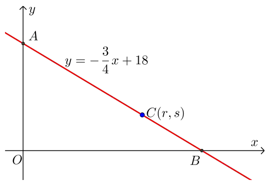
Localiza C

La recta con ecuación $y = -\frac{3}{4}x + 18$ cruza el eje positivo x en el punto B y el eje positivo y en el punto A. El origen, O, y los puntos A y B forman los vértices de un triángulo.

El punto $C(r, s)$ se encuentra en el segmento de recta AB tal que el área del $\triangle AOB$ es tres veces el área del $\triangle COB$.

Determine los valores de r y s.





Problema de la Semana

Problema D y Solución

Localiza C

Problema

La recta con ecuación $y = -\frac{3}{4}x + 18$ cruza el eje positivo x en el punto B y el eje positivo y en el punto A. El origen, O, y los puntos A y B forman los vértices de un triángulo.

El punto $C(r, s)$ se encuentra en el segmento de recta AB tal que el área del $\triangle AOB$ es tres veces el área del $\triangle COB$.

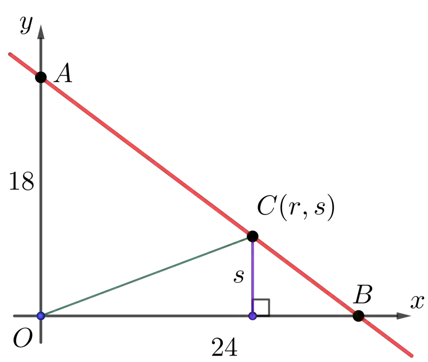
Determine los valores de r y s.

Solución

La ecuación de la recta se escribe en la forma $y = mx + b$, donde b es la intersección con y de la recta. Por lo tanto, la intersección en y de la recta con ecuación $y = -\frac{3}{4} + 18$ es 18, y $OA = 18$.

Para determinar la intersección en x de la línea, reemplazamos $y = 0$ para obtener $0 = -\frac{3}{4}x + 18$. Resolviendo, tenemos $\frac{3}{4}x = 18$, entonces $x = 24$. Por lo tanto, $OB = 24$.

Trazamos la perpendicular de C a OB. La base del $\triangle COB$ es $OB = 24$, y dado que C tiene la coordenada y s, la altura del $\triangle COB$ es s.



Ahora presentamos dos soluciones al problema.

Solución 1:

Como $\triangle AOB$ es un triángulo rectángulo con base $OB = 24$ y altura $OA = 18$, usando la fórmula area $= \frac{\text{base} \times \text{ altura}}{2}$, tenemos área de $\triangle AOB = \frac{24 \times 18}{2} = 216$.

Como el área del $\triangle AOB$ es tres veces el área del $\triangle COB$,
área de $\triangle COB = \frac{1}{3}(\text{área de } \triangle AOB) = \frac{1}{3}(216) = 72$.
Así, $\triangle COB$ tiene área 72, base $OB = 24$ y altura s.

Usando la fórmula área $= \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$, tenemos

$$\begin{aligned} \text{area of } \triangle COB &= \frac{OB \times s}{2} \\ 72 &= \frac{24 \times s}{2} \\ 72 &= 12s \\ s &= 6 \end{aligned}$$

Como $C(r, s)$ está en la recta de ecuación $y = -\frac{3}{4}x + 18$ y $s = 6$, tenemos

$$\begin{aligned} 6 &= -\frac{3}{4}r + 18 \\ \frac{3}{4}r &= 12 \\ r &= 16 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $r = 16$ y $s = 6$.

Solución 2:

$\triangle AOB$ y $\triangle COB$ tienen la misma base, OB. Si dos triángulos tienen la misma base, entonces las áreas de los triángulos son proporcionales a las alturas de los triángulos.

Dado que el área de $\triangle AOB$ es tres veces el área de $\triangle COB$, entonces la altura de $\triangle AOB$ es tres veces la altura de $\triangle COB$. En otras palabras, la altura de $\triangle COB$ es $\frac{1}{3}$ la altura de $\triangle AOB$.

Sabemos que $\triangle AOB$ tiene una altura $OA = 18$ y $\triangle COB$ tiene una altura s. Por lo tanto, $s = \frac{1}{3}(OA) = \frac{1}{3}(18) = 6$.
Como $C(r, s)$ está en la recta de ecuación $y = -\frac{3}{4}x + 18$ y $s = 6$, tenemos

$$\begin{aligned} 6 &= -\frac{3}{4}r + 18 \\ \frac{3}{4}r &= 12 \\ r &= 16 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $r = 16$ y $s = 6$.

Tenga en cuenta que en la segunda solución, en realidad no era necesario encontrar la longitud de OB, ya que nunca se usó.

Extensión:

¿Puedes encontrar las coordenadas del punto D en el segmento de recta AB tal que el área del $\triangle AOD$ sea igual al área del $\triangle COB$, creando así tres triángulos de igual área? ¿Cómo se relacionan los puntos A, D, C y B?

Álgebra (A)

VOLVER A LA PORTADA

Problema de la Semana

Problema D

¿Cuánto es la Cuenta?

Un restaurante esta reacudando fondos para hacer una donacion a su comunidad local. Los clientes del restaurante pueden aportar lo que deseen por una comida, siempre y cuando contribuyan con al menos $1. Una noche, el precio promedio pagado por todos los clientes fue $55. Un cliente más entró y pagó $70 por su comida, elevando el promedio a $56. ¿Cuál es el precio más alto posible que un cliente podría haber pagado por su comida esa noche? Crees que las cantidades pagadas son razonables en este caso?

Problema de la Semana

Problema D y Solución

¿Cuánto es la Cuenta?

Problema

Un restaurante esta reacudando fondos para hacer una donacion a su comunidad local. Los clientes del restaurante pueden aportar lo que deseen por una comida, siempre y cuando contribuyan con al menos \$1. Una noche, el precio promedio pagado por todos los clientes fue \$55. Un cliente más entró y pagó \$70 por su comida, elevando el promedio a \$56. ¿Cuál es el precio más alto posible que un cliente podría haber pagado por su comida esa noche? Crees que las cantidades pagadas son razonables en este caso?

Solución

Para calcular el promedio de un conjunto de valores, primero calculamos la suma de los valores del conjunto y luego la dividimos por el número de valores del conjunto. De ello se deduce que la suma de los valores del conjunto es igual a su promedio multiplicado por el número de valores del conjunto.

Sea n el número de clientes esa noche. Entonces, la cantidad total pagada por todos los clientes esa noche fue $56n$. El cliente final pagó 70 dólares por su comida. Antes de que llegara este cliente, había $(n-1)$ clientes y habían pagado un total de $(56n-70)$ dólares. En ese momento, el precio promedio pagado por todos los clientes era de 55 dólares. Usando esta información, podemos escribir y resolver la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned}\frac{56n-70}{n-1} &= 55\\ 56n-70 &= 55(n-1)\\ 56n-70 &= 55n-55\\ n &= 15\end{aligned}$$

Dado que $n = 15$, se deduce que hubo 15 clientes esa noche y, por lo tanto, la cantidad total pagada por todos los clientes fue $56n = 56(15) = 840$ dólares.

Para determinar el precio más alto posible que un cliente podría haber pagado por su comida esa noche, supondremos que 13 de los clientes pagaron el precio más bajo posible de \$1. Entonces el cliente restante habría pagado $840 - 13 \times 1 - 70 = 757$ dólares.

Por lo tanto, el precio más alto posible que un cliente podría haber pagado por su comida esa noche es \$757.

Como ésta es una recolecta de dinero para una donación, \$1 es probablemente una cantidad muy pequeña para donar por una comida. Similarmente, \$757 es una cantidad muy generosa para donar por una comida.

Extensión:

¿Cómo cambiaría la respuesta si dos clientes no pueden pagar la misma cantidad por su comida?

Problema de la Semana

Problema D

Bailemos

El consejo estudiantil de la secundaria POTW está organizando un baile escolar. Quieren dar un regalo de bienvenida a cada estudiante de noveno grado que asista al baile.

Gifts-R-Us cobra \$1.00 por regalo. Sin embargo, si compraran los regalos en Gifts-R-Us, superarían su presupuesto en \$17.

En Presents-4-U, solo cobran \$0.80 por regalo. A este precio, al consejo estudiantil le sobrarían \$5.00 en su presupuesto.

Determina la cantidad de regalos que el consejo estudiantil planea comprar.

Problema de la Semana

Problema D y Solución

Bailemos

Problema

El consejo estudiantil de la secundaria POTW está organizando un baile escolar. Quieren dar un regalo de bienvenida a cada estudiante de noveno grado que asista al baile.

Gifts-R-Us cobra \$1.00 por regalo. Sin embargo, si compraran los regalos en Gifts-R-Us, superarían su presupuesto en \$17.

En Presents-4-U, solo cobran \$0.80 por regalo. A este precio, al consejo estudiantil le sobrarían \$5.00 en su presupuesto.

Determina la cantidad de regalos que el consejo estudiantil planea comprar.

Solución

Solución 1

Sea n el número de regalos que el consejo estudiantil planea comprar.

Dado que cada obsequio en Gifts-R-Us cuesta \$1.00, el consejo estudiantil gastaría $1 \times n = n$ dólares en total. Si el consejo estudiantil fuera a comprar todos los regalos que quiere en Gifts-R-Us, le faltarían \$17 dólares en su presupuesto. Por lo tanto, su presupuesto es de $(n - 17)$ dólares.

Dado que cada obsequio en Presents-4-U cuesta \$0.80, el consejo estudiantil gastaría $0.8 \times n = 0.8n$ dólares en total. Si el consejo estudiantil comprara todos los regalos que quiere en Presents-4-U, le sobrarían \$5 dólares en su presupuesto. Por lo tanto, su presupuesto es de $(0.8n + 5)$ dólares.

Tenemos dos expresiones para el presupuesto, por lo que podemos establecer la igualdad $n - 17 = 0.8n + 5$. Esto se simplifica a $0.2n = 22$. Luego de dividir cada lado por 0.2, obtenemos $n = 110$.

Por lo tanto, el consejo estudiantil planea comprar 110 en regalos.

Solución 2

Sea n el número de regalos que el consejo estudiantil planea comprar.
Sea x la cantidad que ha presupuestado el consejo estudiantil.

Dado que la diferencia entre los costos de un solo regalo es $\$1.00 - \$0.80 = \$0.20$, la diferencia de costo total de comprar n regalos sería $\$0.2n$.

Para comprar en Gifts-R-Us, el consejo estudiantil necesitaría gastar \$17 más de lo presupuestado. Por lo tanto, necesitarían $(x+17)$ dólares. Para comprar en Presents-4-U, el consejo estudiantil necesitaría gastar \$5 menos de lo presupuestado. Por lo tanto, necesitarían $(x-5)$ dólares. La diferencia de costo total de comprar n regalos sería $(x+17)-(x-5)=22$ dólares.

Tenemos dos expresiones para la diferencia de costos y podemos establecer la igualdad $0.2n=22$. Luego de dividir cada lado por 0.2, obtenemos $n=110$.

Por lo tanto, el consejo estudiantil planea comprar 110 en regalos.

Ten en cuenta que en la Solución 1 y la Solución 2, pudimos encontrar la cantidad de obsequios sin calcular el presupuesto. En la Solución 3, primero calcularemos el presupuesto y luego lo usaremos para calcular la cantidad de obsequios.

Solución 3

Sea n el número de regalos que el consejo estudiantil planea comprar.
Sea x la cantidad que ha presupuestado el consejo estudiantil.

Dado que cada obsequio en Gifts-R-Us cuesta \$1.00, los n obsequios costarían $n\times\$1=\$n$. Además, el consejo estudiantil necesitaría gastar \$17 más de lo presupuestado. Por lo tanto, tenemos

$$n=x+17 \tag{1}$$

Dado que cada obsequio en Presents-4-U cuesta \$0.80, los n obsequios costarían $n\times\$0,8=\$0,8n$. Además, el consejo estudiantil necesitaría gastar \$5 menos de lo presupuestado. Por lo tanto, tenemos

$$0.8n=x-5 \tag{2}$$

Sustituyendo la ecuación (1) en la ecuación (2), tenemos

$$\begin{aligned} 0.8n &= x-5 \\ 0.8(x+17) &= x-5 \\ 0.8x+13.6 &= x-5 \\ 18.6 &= 0.2x \\ x &= 93 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el consejo estudiantil ha presupuestado \$93.

Entonces, usando la ecuación (1), vemos que $n=x+17=93+17=110$.

Por lo tanto, el consejo estudiantil planea comprar 110 en regalos.

Problema de la Semana

Problema D

El Viaje de Profesores

Para ayudar a pasar el tiempo en un largo viaje en autobús, un grupo de profesores de matemáticas creó una secuencia de números, en la que cada profesor decía un término de la secuencia. El primer y el segundo maestro dijeron cada uno un número entero no negativo, y cada maestro después de eso dijo la suma de todos los términos anteriores en la secuencia.

Por ejemplo, si el primer maestro dijo el número 2 y el segundo maestro dijo el número 8, entonces

- el tercer profesor diría la suma del primer y segundo término, que es $2 + 8 = 10$, y
- el cuarto profesor diría la suma del primer, segundo y tercer término, que es $2 + 8 + 10 = 20$.

¿Cuántas secuencias posibles podrían haber dicho los maestros si el primer maestro dijo el número 3 y otro maestro dijo el número 3072?

Problema de la Semana

Problema D y Solución

El Viaje de Profesores

Problema

Para ayudar a pasar el tiempo en un largo viaje en autobús, un grupo de profesores de matemáticas creó una secuencia de números, en la que cada profesor decía un término de la secuencia. El primer y el segundo maestro dijeron cada uno un número entero no negativo, y cada maestro después de eso dijo la suma de todos los términos anteriores en la secuencia.

Por ejemplo, si el primer maestro dijo el número 2 y el segundo maestro dijo el número 8, entonces

- el tercer profesor diría la suma del primer y segundo término, que es $2 + 8 = 10$, y
- el cuarto profesor diría la suma del primer, segundo y tercer término, que es $2 + 8 + 10 = 20$.

¿Cuántas secuencias posibles podrían haber dicho los maestros si el primer maestro dijo el número 3 y otro maestro dijo el número 3072?

Solución

Sabemos cómo construir la secuencia y sabemos que el primer término es 3, pero ¿dónde está el término cuyo valor es 3072?

- ¿Podría 3072 ser el segundo término?

  Si los primeros dos términos son 3 y 3072, entonces podemos calcular los siguientes términos.

  - El tercer término sería $3 + 3072 = 3075$.
  - El cuarto término sería $3 + 3072 + 3075 = 3075 + 3075 = 2(3075) = 6150$.
  - El quinto término sería $3 + 3072 + 3075 + 6150 = 6150 + 6150 = 2(6150) = 12300$.

  Vemos que podemos determinar cualquier término más allá del tercer término sumando todos los términos anteriores, o simplemente podemos duplicar el término inmediatamente anterior al requerido, ya que ese término es la suma de todos los términos anteriores. (Esto también significa que si se conoce algún término después del tercero, entonces el término anterior es la mitad del valor de ese término).

Por lo tanto, hay una sucesión posible con 3072 como segundo término. Los primeros 6 términos de esta sucesión son
$3,\ 3072,\ 3075,\ 6150,\ 12300,\ 24600.$

- ¿Podría 3072 ser el tercer término?

  Sí, dado que el tercer término es la suma de los dos primeros términos, y el primer término es 3, entonces el segundo término sería $3072 - 3 = 3069$ y los primeros 6 términos de esta secuencia son
  $3,\ 3069,\ 3072,\ 6144,\ 12288,\ 24576.$

- ¿Podría 3072 ser el cuarto término?

  Sí, dado que el cuarto término es par, entonces podemos determinar que el tercer término es la mitad del cuarto término, que es $3072 \div 2 = 1536$, entonces el segundo término sería $1536 - 3 = 1533$. Los primeros 6 términos de esta secuencia son $3,\ 1533,\ 1536,\ 3072,\ 6144,\ 12288.$

- ¿Podría 3072 ser el quinto término?

  Para pasar del quinto término al tercer término dividiríamos por 2 dos veces, o podríamos dividir por 4. Si el tercer término resultante es un número entero no negativo mayor o igual que 3, entonces la secuencia existe. El tercer término sería $3072 \div 4 = 768$, y el segundo término sería $768 - 3 = 765$. Así existe la sucesión y los primeros 6 términos son
  $3,\ 765,\ 768,\ 1536,\ 3072,\ 6144.$

Podríamos continuar de esta manera hasta que descubramos todas las sucesiones posibles que se forman de acuerdo con las reglas dadas con el primer término 3 y 3072 en algún lugar de la sucesión. Sin embargo, si observamos la descomposición en factores primos de 3072 vemos que la potencia más alta de 2 que divide a 3072 es 1024 (o 2^{10}), ya que $3072 = 2^{10} \times 3$. De hecho, dividir 3072 entre 1024 produciría un tercer término que sería 3. El segundo término sería entonces 0, un número entero no negativo, y la secuencia resultante sería $3,\ 0,\ 3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ 192,\ 384,\ 768,\ 1536,\ 3072,\ 6144, \ldots$.

Si dividimos 3072 por cualquier potencia entera de 2, de $2^0 = 1$ a $2^{10} = 1024$, el tercer término resultante sería un número entero mayor que o igual a 3, y 3072 aparecerían en cada una de estas secuencias. Hay 11 tales secuencias. El número 3072 aparecería en algún lugar entre el término 3 y el término 13 en la secuencia aceptable. Sin embargo, 3072 también puede aparecer como segundo término, por lo que hay un total de 12 secuencias posibles.

¿Podría ser 3072 el decimocuarto término? Del decimocuarto término al tercer término tendríamos que dividir 3072 entre 2^{11}. El tercer término resultante sería $\frac{3}{2}$. Esto significaría que el segundo término no es un número entero y, por lo tanto, la secuencia no es posible.

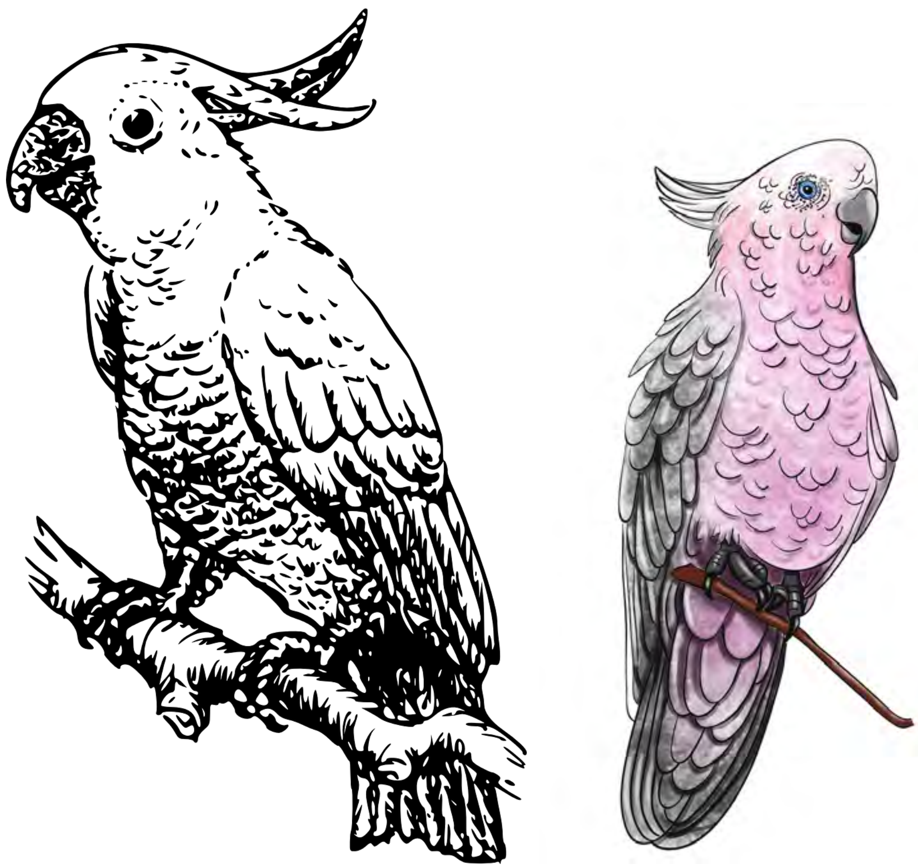
Por lo tanto, hay un total de 12 secuencias posibles.

Problema de la Semana

Problema D

Dos Pájaros

Katty tiene dos pájaros, uno blanco y uno rosado. El pájaro blanco es mayor que el pájaro rosado. En la actualidad, la suma de las edades de los pájaros es 44 años. En n años, donde $n > 0$, la edad del pájaro blanco será cuatro veces la edad del pájaro rosado. Si n es un número entero, determine las posibles edades actuales de cada pájaro.



Problema de la Semana
Problema D y Solución
Dos Pájaros

Problema

Katty tiene dos pájaros, uno blanco y uno rosado. El pájaro blanco es mayor que el pájaro rosado. En la actualidad, la suma de las edades de los pájaros es 44 años. En n años, donde $n > 0$, la edad del pájaro blanco será cuatro veces la edad del pájaro rosado. Si n es un número entero, determine las posibles edades actuales de cada pájaro.

Solución

Sea b la edad actual del pájaro blanco y r la edad actual del pájaro rosado. Como la suma de sus edades actuales es 44, tenemos $b + r = 44$ o $r = 44 - b$.

En n años, el pájaro blanco tendrá $(b + n)$ años y el pájaro rosado $(44 - b + n)$ años. En ese momento el pájaro blanco será cuatro veces mayor que el pájaro rosado. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 4(b+n) &= 44 - b + n \\ 4b + 4n &= 44 - b + n \\ 5b + 3n &= 44 \\ b &= \frac{44 - 3n}{5} \end{aligned}$$

Estamos buscando valores enteros de n para que $44 - 3n$ sea divisible por 5.

Cuando $n = 3$, $b = \frac{44-3n}{5} = \frac{44-3(3)}{5} = \frac{35}{5} = 7$. Cuando $b = 7$, $r = 44 - b = 44 - 7 = 37$.

Cuando $n = 8$, $b = \frac{44-3n}{5} = \frac{44-3(8)}{5} = \frac{20}{5} = 4$. Cuando $b = 4$, $r = 44 - b = 44 - 4 = 40$.

Cuando $n = 13$, $b = \frac{44-3n}{5} = \frac{44-3(13)}{5} = \frac{5}{5} = 1$. Cuando $b = 1$, $r = 44 - b = 44 - 1 = 43$.

Cuando $n = 18$, $b = \frac{44-3n}{5} = \frac{44-3(18)}{5} = \frac{-10}{5} = -2$. Dado que $b < 0$, $n = 18$ no produce una edad válida para el pájaro blanco. Ningún valor mayor de n produciría un valor de $b > 0$.

Ningún valor entero de n entre 0 y 18, aparte de 3, 8 y 13, produce un múltiplo de 5 cuando se sustituye en $44 - 3n$.

Si hoy el pájaro blanco tiene 37 años y el pájaro rosado tiene 7 años, entonces en 3 años el pájaro blanco tendrá 40 años y el pájaro rosado tendrá 10 años. El pájaro blanco será cuatro veces mayor que el pájaro rosado ya que $4 \times 10 = 40$.

Si hoy el pájaro blanco tiene 40 años y el pájaro rosado tiene 4 años, entonces en 8 años el pájaro blanco tendrá 48 años y el pájaro rosado tendrá 12 años. El pájaro blanco será cuatro veces mayor que el pájaro rosado ya que $4 \times 12 = 48$.

Si hoy el pájaro blanco tiene 43 años y el pájaro rosado tiene 1 años, entonces en 13 años el pájaro blanco tendrá 56 años y el pájaro rosado tendrá 14 años. El pájaro blanco será cuatro veces mayor que el pájaro rosado ya que $4 \times 14 = 56$.

Por lo tanto, las posibles edades actuales para los pájaros blanco y rosado son 37 y 7, o 40 y 4, o 43 y 1, respectivamente.

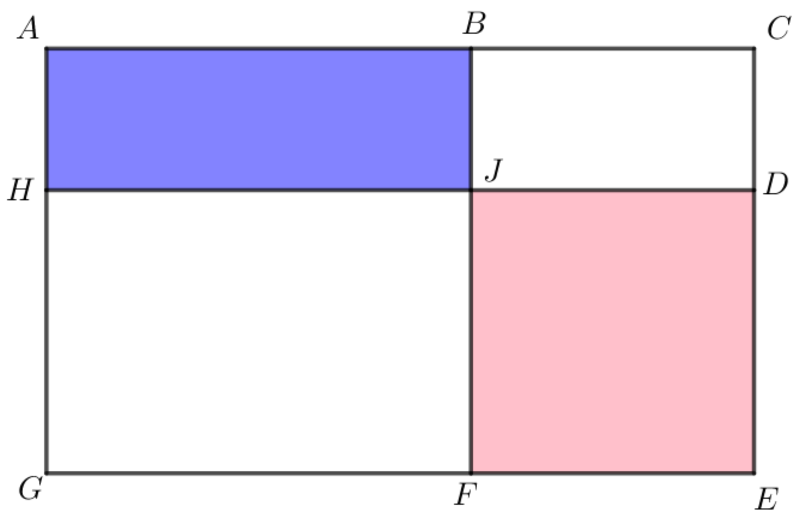
Problema de la Semana

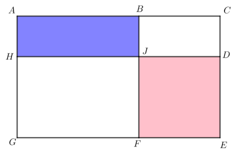
Problema D

Halla el Área Más Grande

El rectángulo $ACEG$ tiene B en AC y F en EG tal que BF es paralelo a CE. Además, D está en CE y H está en AG de modo que HD es paralelo a AC y BF intersecta a HD en J. El área del rectángulo $ABJH$ es 6 cm^2 y el área del rectángulo $JDEF$ es 15 cm^2.

Si las dimensiones de los rectángulos $ABJH$ y $JDEF$, en centímetros, son números enteros, determina el área más grande posible del rectángulo $ACEG$. Ten en cuenta que el diagrama es solo una ilustración y no pretende estar a escala.





Problema de la Semana

Problema D y Solución

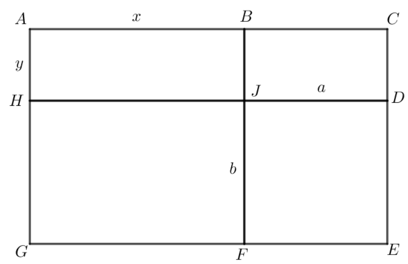
Halla el Área Más Grande

Problema

El rectángulo $ACEG$ tiene B en AC y F en EG tal que BF es paralelo a CE. Además, D está en CE y H está en AG de modo que HD es paralelo a AC y BF intersecta a HD en J. El área del rectángulo $ABJH$ es 6 cm^2 y el área del rectángulo $JDEF$ es 15 cm^2.

Si las dimensiones de los rectángulos $ABJH$ y $JDEF$, en centímetros, son números enteros, determina el área más grande posible del rectángulo $ACEG$.

Solución



Sea $AB = x$, $AH = y$, $JD = a$ and $JF = b$.
Entonces,

$$\begin{aligned} HJ &= GF = AB = x \\ BJ &= CD = AH = y \\ BC &= FE = JD = a \\ HG &= DE = JF = b \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} \text{área}(ACEG) &= \text{área}(ABJH) + \text{área}(BCDJ) + \text{área}(JDEF) + \text{área}(HJFG) \\ &= 6 + ya + 15 + xb \\ &= 21 + ya + xb \end{aligned}$$

Dado que el área del rectángulo $ABJH$ es 6 cm^2 y las longitudes de los lados de $ABJH$ son números enteros, entonces las longitudes de los lados deben ser 1 y 6 o 2 y 3. Es decir, $x = 1$ cm y $y = 6$ cm, $x = 6$ cm y $y = 1$ cm, $x = 2$ cm y $y = 3$ cm, o $x = 3$ cm y $y = 2$ cm.

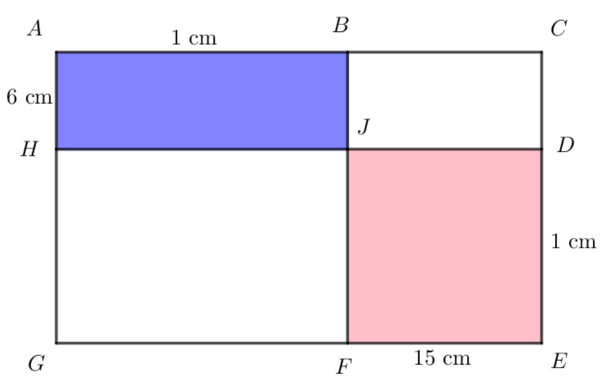
Dado que el área del rectángulo $JDEF$ es 15 cm^2 y las longitudes de los lados de $JDEF$ son números enteros, entonces las longitudes de los lados deben ser 1 y 15 o 3 y 5. Es decir, las opciones son: $a = 1$ cm y $b = 15$ cm, $a = 15$ cm y $b = 1$ cm, $a = 3$ cm y $b = 5$ cm, o $a = 5$ cm y $b = 3$ cm.

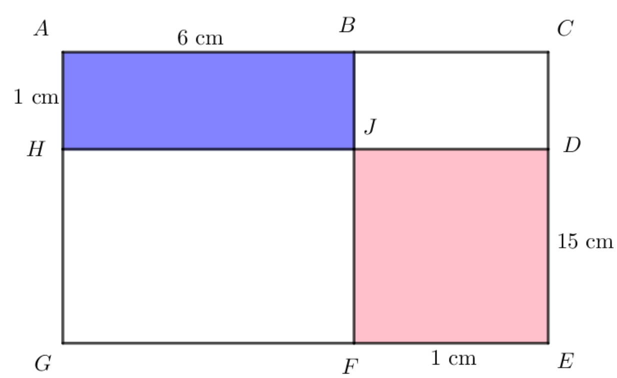
Para maximizar el área, debemos elegir los valores de x, y, a y b que hacen que $ya + xb$ sea lo más grande posible. Ahora dividiremos los casos según las posibles longitudes de los lados de $ABJH$ y $JDEF$ y calcularemos el área de $ACEG$ en cada caso. No necesitamos probar todos los 16 pares posibles, porque probar $x = 1$ cm y $y = 6$ cm con las cuatro posibilidades de a y b dará las mismas 4 áreas, en algún orden, como probar $x = 6$ cm y $y = 1$ cm con las cuatro posibilidades de a y b. De manera similar, intentar $x = 2$ cm y $y = 3$ cm con las cuatro posibilidades de a y b dará las mismas 4 áreas, en algún orden, que intentar $x = 3$ cm y $y = 2$ cm con las cuatro posibilidades de a y b. (Como ejercicio, analiza por qué esto es cierto).

- **Caso 1:** $x = 1$ cm, $y = 6$ cm, $a = 1$ cm, $b = 15$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 6(1) + 1(15) = 42$ cm^2.
- **Caso 2:** $x = 1$ cm, $y = 6$ cm, $a = 15$ cm, $b = 1$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 6(15) + 1(1) = 112$ cm^2.
- **Caso 3:** $x = 1$ cm, $y = 6$ cm, $a = 3$ cm, $b = 5$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 6(3) + 1(5) = 44$ cm^2.
- **Caso 4:** $x = 1$ cm, $y = 6$ cm, $a = 5$ cm, $b = 3$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 6(5) + 1(3) = 54$ cm^2.
- **Caso 5:** $x = 2$ cm, $y = 3$ cm, $a = 1$, $b = 15$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 3(1) + 2(15) = 54$ cm^2.
- **Caso 6:** $x = 2$ cm, $y = 3$ cm, $a = 15$, $b = 1$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 3(15) + 2(1) = 68$ cm^2.
- **Caso 7:** $x = 2$ cm, $y = 3$ cm, $a = 3$, $b = 5$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 3(3) + 2(5) = 40$ cm^2.
- **Caso 8:** $x = 2$ cm, $y = 3$ cm, $a = 5$, $b = 3$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 3(5) + 2(3) = 42$ cm^2.

Vemos que el área máxima es 112 cm^2, y ocurre cuando $x = 1$ cm, $y = 6$ cm y $a = 15$ cm, $b = 1$ cm. También ocurrirá cuando $x = 6$ cm, $y = 1$ cm y $a = 1$ cm, $b = 15$ cm.

Los siguientes diagramas muestran los valores calculados para x, y, a, b colocados en el diagrama original. ¡El diagrama dado en el problema definitivamente no fue dibujado a escala! Ambas soluciones producen rectángulos con dimensiones de 7 cm por 16 cm y un área de 112 cm^2.





Problema de la Semana

Problema D

Todo Mezclado

Un tazón grande contiene una mezcla de sal rosa del Himalaya y sal de mesa. Cuando se agrega 1 kg de sal de mesa al recipiente, la proporción, en masa, de sal rosa del Himalaya a sal de mesa se convierte en $1:2$. Cuando se agrega 1 kg de sal rosa del Himalaya a la nueva mezcla, la proporción se convierte en $2:3$. Encuentra la proporción de sal rosa del Himalaya y sal de mesa en la mezcla original.

Problema de la Semana

Problema D y Solución

Todo Mezclado

Problema

Un tazón grande contiene una mezcla de sal rosa del Himalaya y sal de mesa. Cuando se agrega 1 kg de sal de mesa al recipiente, la proporción, en masa, de sal rosa del Himalaya a sal de mesa se convierte en 1 : 2. Cuando se agrega 1 kg de sal rosa del Himalaya a la nueva mezcla, la proporción se convierte en 2 : 3. Encuentra la proporción de sal rosa del Himalaya y sal de mesa en la mezcla original.

Solución

Sea h la cantidad de sal rosa del Himalaya, en kgs, en la mezcla original.
Sea c la cantidad de sal de mesa, en kgs, en la mezcla original.

Cuando se agrega 1 kg de sal de mesa, la proporción de sal rosa del Himalaya a sal de mesa es 1 : 2. Por lo tanto,

$$\frac{h}{c+1} = \frac{1}{2}$$

Simplificando, obtenemos $c + 1 = 2h$, por lo que $c = 2h - 1$.

Cuando se agrega 1 kg de sal rosa del Himalaya a la nueva mezcla, la proporción se convierte en 2 : 3. Por lo tanto,

$$\frac{h+1}{c+1} = \frac{2}{3}$$

Como $c = 2h - 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{h+1}{(2h-1)+1} &= \frac{2}{3} \\ \frac{h+1}{2h} &= \frac{2}{3} \\ 2(2h) &= 3(h+1) \\ 4h &= 3h+3 \\ h &= 3 \end{aligned}$$

Sustituyendo $h = 3$ en $c = 2h - 1$, obtenemos $c = 2(3) - 1 = 5$.

Por lo tanto, originalmente había 3 kg de sal rosa del Himalaya en el recipiente y 5 kg de sal de mesa. Por lo tanto, la proporción de sal rosa del Himalaya a sal de mesa en la mezcla original era de 3 : 5.

Problema de la Semana

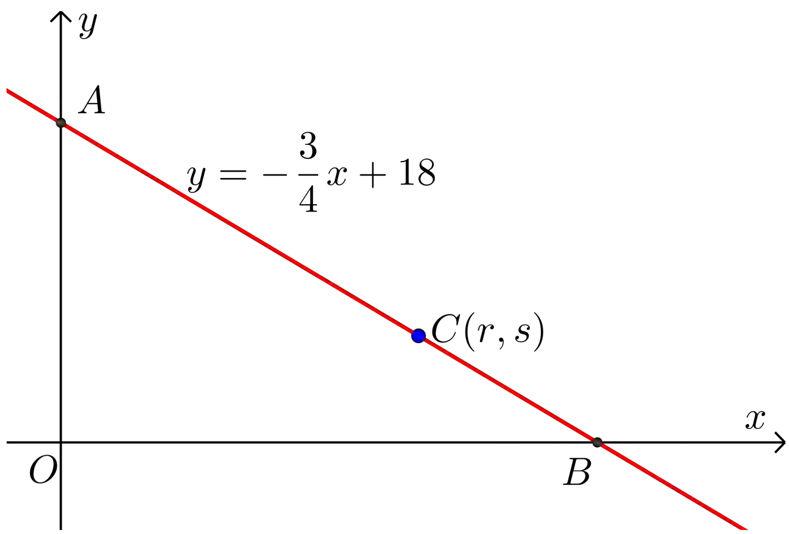
Problema D

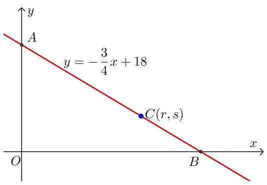
Localiza C

La recta con ecuación $y = -\frac{3}{4}x + 18$ cruza el eje positivo x en el punto B y el eje positivo y en el punto A. El origen, O, y los puntos A y B forman los vértices de un triángulo.

El punto $C(r, s)$ se encuentra en el segmento de recta AB tal que el área del $\triangle AOB$ es tres veces el área del $\triangle COB$.

Determine los valores de r y s.





Problema de la Semana

Problema D y Solución

Localiza C

Problema

La recta con ecuación $y = -\frac{3}{4}x + 18$ cruza el eje positivo x en el punto B y el eje positivo y en el punto A. El origen, O, y los puntos A y B forman los vértices de un triángulo.

El punto $C(r, s)$ se encuentra en el segmento de recta AB tal que el área del $\triangle AOB$ es tres veces el área del $\triangle COB$.

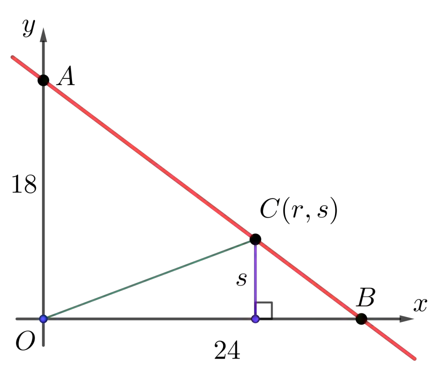
Determine los valores de r y s.

Solución

La ecuación de la recta se escribe en la forma $y = mx + b$, donde b es la intersección con y de la recta. Por lo tanto, la intersección en y de la recta con ecuación $y = -\frac{3}{4} + 18$ es 18, y $OA = 18$.

Para determinar la intersección en x de la línea, reemplazamos $y = 0$ para obtener $0 = -\frac{3}{4}x + 18$. Resolviendo, tenemos $\frac{3}{4}x = 18$, entonces $x = 24$. Por lo tanto, $OB = 24$.

Trazamos la perpendicular de C a OB. La base del $\triangle COB$ es $OB = 24$, y dado que C tiene la coordenada y s, la altura del $\triangle COB$ es s.



Ahora presentamos dos soluciones al problema.

Solución 1:

Como $\triangle AOB$ es un triángulo rectángulo con base $OB = 24$ y altura $OA = 18$, usando la fórmula area $= \frac{\text{base} \times \text{ altura}}{2}$, tenemos área de $\triangle AOB = \frac{24 \times 18}{2} = 216$.

Como el área del $\triangle AOB$ es tres veces el área del $\triangle COB$,
área de $\triangle COB = \frac{1}{3}(\text{área de } \triangle AOB) = \frac{1}{3}(216) = 72$.
Así, $\triangle COB$ tiene área 72, base $OB = 24$ y altura s.

Usando la fórmula área $= \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$, tenemos

$$\begin{aligned}\text{area of } \triangle COB &= \frac{OB \times s}{2} \\ 72 &= \frac{24 \times s}{2} \\ 72 &= 12s \\ s &= 6\end{aligned}$$

Como $C(r, s)$ está en la recta de ecuación $y = -\frac{3}{4}x + 18$ y $s = 6$, tenemos

$$\begin{aligned}6 &= -\frac{3}{4}r + 18 \\ \frac{3}{4}r &= 12 \\ r &= 16\end{aligned}$$

Por lo tanto, $r = 16$ y $s = 6$.

Solución 2:

$\triangle AOB$ y $\triangle COB$ tienen la misma base, OB. Si dos triángulos tienen la misma base, entonces las áreas de los triángulos son proporcionales a las alturas de los triángulos.

Dado que el área de $\triangle AOB$ es tres veces el área de $\triangle COB$, entonces la altura de $\triangle AOB$ es tres veces la altura de $\triangle COB$. En otras palabras, la altura de $\triangle COB$ es $\frac{1}{3}$ la altura de $\triangle AOB$.

Sabemos que $\triangle AOB$ tiene una altura $OA = 18$ y $\triangle COB$ tiene una altura s. Por lo tanto, $s = \frac{1}{3}(OA) = \frac{1}{3}(18) = 6$.
Como $C(r, s)$ está en la recta de ecuación $y = -\frac{3}{4}x + 18$ y $s = 6$, tenemos

$$\begin{aligned}6 &= -\frac{3}{4}r + 18 \\ \frac{3}{4}r &= 12 \\ r &= 16\end{aligned}$$

Por lo tanto, $r = 16$ y $s = 6$.

Tenga en cuenta que en la segunda solución, en realidad no era necesario encontrar la longitud de OB, ya que nunca se usó.

Extensión:

¿Puedes encontrar las coordenadas del punto D en el segmento de recta AB tal que el área del $\triangle AOD$ sea igual al área del $\triangle COB$, creando así tres triángulos de igual área? ¿Cómo se relacionan los puntos A, D, C y B?

Manejo de Datos (D)

VOLVER A LA PORTADA

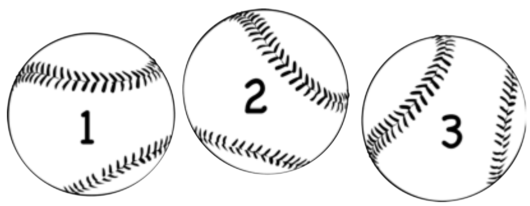
Problema de la Semana

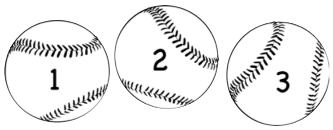
Problema D

El Juego de Béisbol

Abigail creó un juego para la feria de matemáticas de su escuela. El juego consiste en poner 3 bolas de béisbol, numeradas del 1 al 3, en una bolsa. Luego, sin mirar, los participantes escogen aleatoriamente una bola de la bolsa, anotan el número, y ponen la bola de regreso en la bolsa. Los participantes hacen esto dos veces más y luego calculan la suma de los tres números anotados. Si la suma es menor a 8, el participante gana un premio.

¿Cuál es la probabilidad de que un participante gane un premio al jugar este juego una vez?





Problema de la Semana
Problema D y Solución
El Juego de Béisbol

Problema

Abigail creó un juego para la feria de matemáticas de su escuela. El juego consiste en poner 3 bolas de béisbol, numeradas del 1 al 3, en un bolsa. Luego, sin mirar, los participantes escogen aleatoriamente una bola de la bolsa, anotan el número, y ponen la bola de regreso en la bolsa. Los participantes hacen esto dos veces más y luego calculan la suma de los tres números anotados. Si la suma es menor a 8, el participante gana un premio.

¿Cuál es la probabilidad de que un participante gane un premio al jugar este juego una vez?

Solución

Para poder determinar la probabilidad, necesitamos determinar la cantidad de maneras de escoger 3 bolas de béisbol de la bolsa tal que la suma de sus números sea menor que 8, y luego dividir ese número para el total de maneras de escoger las tres bolas de béisbol de la bolsa.

Primero, determinemos la cantidad de maneras de escoger 3 bolas de béisbol de la bolsa. Las bolas de béisbol son reemplazadas después de cada elección, por lo que cada vez que se escoge una bola puede tener el número 1, 2, o 3. Como escogemos una bola de la bolsa 3 veces y hay 3 valores posibles por cada elección, hay $3 \times 3 \times 3 = 27$ maneras de escoger 3 bolas de béisbol de la bolsa.

Presentamos dos soluciones a este problema. En la Solución 1, calculamos directamente la cantidad de maneras de escoger 3 bolas de béisbol de la bolsa tal que la suma de sus números sea menor que 8. En la Solución 2, la calculamos de manera indirecta. Contamos la cantidad de maneras de escoger 3 bolas de béisbol de la bolsa tal que la suma de sus números sea 8 o mayor, y luego sustraemos ese número de 27 para obtener la cantidad deseada. En este problema es más facil contar la cantidad deseada de manera indirecta.

Solución 1

Veamos cuantas de las 27 maneras de escoger las bolas resultan en una suma que es menor a 8 al ordernar las diferentes posibilidades.

- La bola 1 es seleccionada tres veces. En este caso, la suma sería $1 + 1 + 1 = 3 < 8$. Esta selección se puede hacer de 1 manera: $1, 1, 1$.
- La bola 1 es seleccionada dos veces y la bola 2 es seleccionada una vez. En este caso, la suma sería $1 + 1 + 2 = 4 < 8$. Esta selección se puede hacer de 3 maneras: $1, 1, 2$ o $1, 2, 1$ o $2, 1, 1$.
- La bola 1 es seleccionada dos veces y la bola 3 es seleccionada una vez. En este caso, la suma sería $1 + 1 + 3 = 5 < 8$. Esta selección se puede hacer de 3 maneras: $1, 1, 3$ o $1, 3, 1$ o $3, 1, 1$.
- La bola 1 es seleccionada una vez y la bola 2 es seleccionada dos veces. En este caso, la

suma sería $1 + 2 + 2 = 5 < 8$. Esta selección se puede hacer de 3 maneras: $1, 2, 2$ o $2, 1, 2$ o $2, 2, 1$.

- La bola 1 es seleccionada una vez y la bola 3 es seleccionada dos veces. En este caso, la suma sería $1 + 3 + 3 = 7 < 8$. Esta selección se puede hacer de 3 maneras: $1, 3, 3$ o $3, 1, 3$ o $3, 3, 1$.
- La bola 1 es seleccionada una vez, la bola 2 es seleccionada una vez, y la bola 3 es seleccionada una vez. En este caso, la suma sería $1 + 2 + 3 = 6 < 8$. Esta selección se puede hacer de 6 maneras: $1, 2, 3$ o $1, 3, 2$ o $2, 1, 3$ o $2, 3, 1$ o $3, 1, 2$ o $3, 2, 1$.
- La bola 2 es seleccionada tres veces. En este caso, la suma sería $2 + 2 + 2 = 6 < 8$. Esta selección se puede hacer de 1 manera: $2, 2, 2$.
- La bola 2 es seleccionada dos veces y la bola 3 es seleccionada una vez. En este caso, la suma sería $2 + 2 + 3 = 7 < 8$. Esta selección se puede hacer de 3 maneras: $2, 2, 3$ o $2, 3, 2$ o $3, 2, 2$.
- La bola 2 es seleccionada una vez y la bola 3 es seleccionada dos veces. En este caso, la suma sería $2 + 3 + 3 = 8$, lo cual no es menor a 8.
- La bola 3 es seleccionada tres veces. En este caso, la suma sería $3 + 3 + 3 = 9$, lo cual no es menor a 8.

Consecuentemente, hay $1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 6 + 1 + 3 = 23$ maneras de escoger 3 bolas de béisbol de la bolsa tal que la suma de sus números sea menor que 8.

Por lo tanto, la probabilidad de que la suma sea menor 8 es $\frac{23}{27}$, o aproximadamente 85%.

Solution 2

Determinemos cuántas de las 27 posibles elecciones resultan en una suma igual o mayor a 8. Como la máxima suma es 9, necesitamos contar la cantidad de maneras de que la suma sea 8 o 9.

- La única manera de que la suma sea 8 es escoger la bola 2 una vez y la bola 3 dos veces. Esto se puede hacer de 3 maneras: $2, 3, 3$ o $3, 2, 3$ o $3, 3, 2$.
- La única manera de que la suma sea 9 es escoger la bola 3 tres veces. Esto se puede hacer de 1 manera: $3, 3, 3$.

Notamos que hay $3 + 1 = 4$ maneras de escoger 3 bolas de béisbol de la bolsa tal que la suma de sus números sea igual o mayor 8. Por lo tanto, de las 27 posibilidades, $27 - 4 = 23$ nos dan una suma menor a 8.

Consecuentemente, la probabilidad de que la suma sea menor 8 es $\frac{23}{27}$, o aproximadamente 85%.

¡Contar la cantidad deseada de manera indirecta es definitivamente más eficiente!

Extensión:

El juego de Abigail es *injusto* ya que la probabilidad de que la suma sea menor a 8 es $\frac{23}{27}$ o 85% mientras que la probilidad de que la suma sea 8 o mayor is $\frac{4}{27}$ o 15%. En un juego justo, queremos que la probabilidad de ganar sea la misma a la de perder. ¿Podrías modificar el juego de Abigail para hacerlo justo?

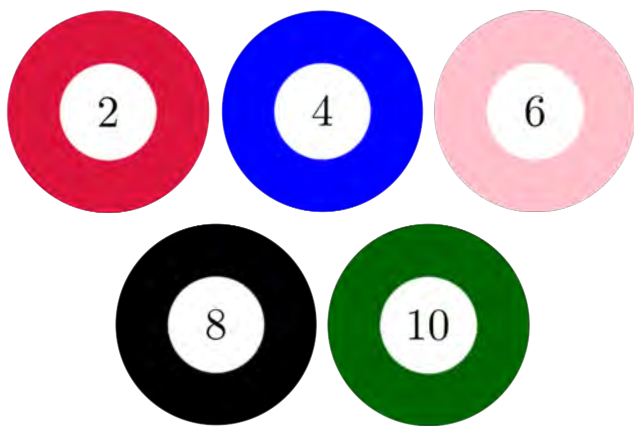
Problema de la Semana

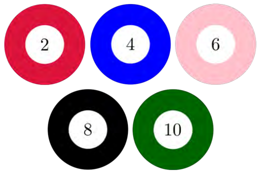
Problema D

Sin Potencias de 2

Se colocan cinco bolas en una bolsa. Cada bola está etiquetada con 2, 4, 6, 8 o 10, y ninguna bola tiene el mismo número que otra. Abigail elige una pelota al azar, anota el número entero de la pelota y vuelve a colocar la pelota en la bolsa. Luego, Bob elige una pelota al azar, anota el número entero en la pelota y vuelve a colocar la pelota en la bolsa. Finalmente, Carlos elige una pelota al azar, anota el número entero de la pelota y vuelve a colocar la pelota en la bolsa.

Determina la probabilidad de que el producto de los tres enteros anotados no sea una potencia de 2.





Problema de la Semana

Problema D y Solución

Sin Potencias de 2

Problema

Se colocan cinco bolas en una bolsa. Cada bola está etiquetada con 2, 4, 6, 8 o 10, y ninguna bola tiene el mismo número que otra. Abigail elige una pelota al azar, anota el número entero de la pelota y vuelve a colocar la pelota en la bolsa. Luego, Bob elige una pelota al azar, anota el número entero en la pelota y vuelve a colocar la pelota en la bolsa. Finalmente, Carlos elige una pelota al azar, anota el número entero de la pelota y vuelve a colocar la pelota en la bolsa. Determina la probabilidad de que el producto de los tres enteros anotados no sea una potencia de 2.

Solución

Solución 1

Una forma de resolver este problema es hacer una lista de todas las opciones posibles, calcular el producto de cada opción y luego contar la cantidad de productos que no son una potencia de 2. Si lo hiciéramos, encontraríamos que hay 125 opciones posibles. De estos, 98 dan como resultado un producto que no es una potencia de 2.

Por lo tanto, la probabilidad de que el producto no sea un producto de 2 es $\frac{98}{125}$. En las Soluciones 2 y 3, veremos formas más eficientes de calcular esta probabilidad.

Solución 2

Cuando se calcula el producto de los tres enteros, el producto es una potencia de 2 o no es una potencia de 2. Por lo tanto, para determinar el número de opciones que dan como resultado un producto que no es una potencia de 2, contaremos el número de opciones que dan como resultado un producto que es una potencia de 2 y lo restamos del número total de opciones.

Ya que Abigail, Bob y Carlos tienen cada uno cinco enteros posibles que pueden elegir, hay $5 \times 5 \times 5 = 125$ elecciones posibles de enteros. Para que el producto de los tres enteros sea una potencia de 2, no puede tener factores primos distintos de 2. En particular, esto significa que cada uno de los tres enteros elegidos debe ser una potencia de 2. Hay tres bolas etiquetadas con una potencia de 2: 2, 4 y 8. Por lo tanto, el número de opciones que resultan en una potencia de 2 es $3 \times 3 \times 3 = 27$.

Dado que hay 27 opciones que dan un producto que es una potencia de 2, deben haber $125 - 27 = 98$ opciones que dan un producto que no es una potencia de 2. Por lo tanto, la probabilidad de que el producto no sea una potencia de 2 es $\frac{98}{125}$.

Solución 3

Cuando se calcula el producto de los tres enteros, el producto es una potencia de 2 o no es una potencia de 2. Si p es la probabilidad de que el producto sea una potencia de 2 y q es la probabilidad de que el producto no sea una potencia de 2, entonces $p + q = 1$. Por lo tanto, podemos calcular q calculando p y notando que $q = 1 - p$.

Para que el producto de los tres enteros sea una potencia de 2, no puede tener factores primos distintos de 2. En particular, esto significa que cada uno de los tres enteros debe ser una potencia de 2. Hay tres bolas etiquetadas con una potencia de 2: 2, 4 y 8. Por lo tanto, la probabilidad de elegir al azar una pelota con una etiqueta que sea potencia de 2 es $\frac{3}{5}$. Como Abigail, Bob y Carlos eligen sus números enteros de forma independiente, entonces la probabilidad de que cada uno elija una potencia de 2 es $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$. En otras palabras, $p = \frac{27}{125}$, entonces $q = 1 - p = 1 - \frac{27}{125} = \frac{98}{125}$. Por lo tanto, la probabilidad de que el producto no sea una potencia de 2 es $\frac{98}{125}$.

Problema de la Semana

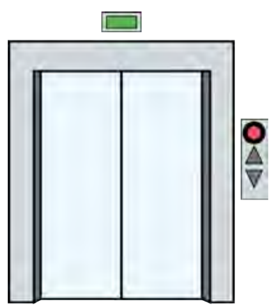
Problema D

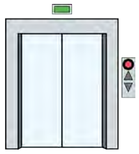
El Ascensor

Hay seis personas en un ascensor. La suma de sus seis edades es 190 y la mediana de sus edades es 22. De menor a mayor, los nombres de las personas en el ascensor son Alberto, Bruno, Carlos, Daniela, Ema y Fernando.

El ascensor se detiene y Alberto y Ema se bajan. Entonces, la edad media (promedio) de las cuatro personas restantes en el ascensor es 30. Luego, el ascensor se detiene nuevamente y Bruno y Carlos se bajan. Entonces, la edad media de las dos personas restantes en el ascensor es 40.

Si Alberto tiene 18 años y la edad de cada persona es un número entero positivo diferente, ¿cuántos años tiene Fernando?





Problema de la Semana

Problema D y Solución

El Ascensor

Problema

Hay seis personas en un ascensor. La suma de sus seis edades es 190 y la mediana de sus edades es 22. De menor a mayor, los nombres de las personas en el ascensor son Alberto, Bruno, Carlos, Daniela, Ema y Fernando.

El ascensor se detiene y Alberto y Ema se bajan. Entonces, la edad media (promedio) de las cuatro personas restantes en el ascensor es 30. Luego, el ascensor se detiene nuevamente y Bruno y Carlos se bajan. Entonces, la edad media de las dos personas restantes en el ascensor es 40.

Si Alberto tiene 18 años y la edad de cada persona es un número entero positivo diferente, ¿cuántos años tiene Fernando?

Solución

Sean A, B, C, D, E y F las edades de Alberto, Bruno, Carlos, Daniela, Ema y Fernando, respectivamente.

Dado que la suma de las seis edades es 190, se sigue que $A + B + C + D + E + F = 190$.

Después de que Alberto y Ema bajan del ascensor, la edad media de las cuatro personas restantes es 30. De este modo,

$$\begin{aligned} \frac{B + C + D + F}{4} &= 30 \\ B + C + D + F &= 120 \end{aligned}$$

Así, después de que Alberto y Ema se van, la suma de las edades de las personas en el ascensor se reduce en $190 - 120 = 70$. Se sigue que $A + E = 70$.

Después de que Bruno y Carlos bajan del ascensor, la edad media de las dos personas restantes es 40. De este modo,

$$\begin{aligned} \frac{D + F}{2} &= 40 \\ D + F &= 80 \end{aligned}$$

Así, después de que Bruno y Carlos se fueran, la suma de las edades de las personas en el ascensor se redujo en $120 - 80 = 40$. Se sigue que $B + C = 40$.

Nos dicen que Alberto tiene 18 años, entonces $A = 18$. Como $A + E = 70$, se sigue que $E = 70 - 18 = 52$.

Dado que hay seis personas en total, la mediana de la edad es la mitad de la suma de las dos edades en las posiciones intermedias cuando se organizan en orden creciente. Así, la mediana es la mitad de la suma de C y D. Dado que cada edad es un número entero positivo diferente, C debe ser menor que la mediana. Así, $C < 22$. Dado que $B + C = 40$ y $B < C$, la única posibilidad es $C = 21$ y $B = 19$.

Sabemos que $C = 21$, y la mediana es la mitad de la suma de C y D. Como la mediana es 22, podemos concluir que $D = 23$. Entonces, como $D + F = 80$, se sigue que $F = 80 - 23 = 57$. Así, Fernando tiene 57 años.

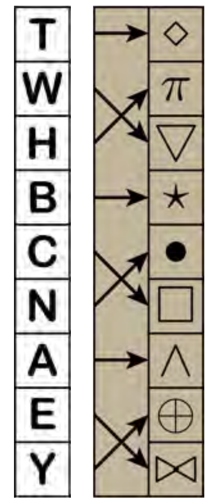
Pensamiento Computacional (C)

VOLVER A LA PORTADA

Problema de la Semana

Problema D

Búsqueda de Tesoros



Víctor está creando una búsqueda de tesoros para sus hermanos menores en la cual las pistas son todas lugares en Canadá. Para hacerla más difícil, él codifica las pistas con una máquina de cifrado que el creó. Esta máquina consiste de dos tiras de papel, cada una con longitud igual a la circunferencia de un tubo de papel. Un papel contiene una columna de letras y el otro contiene una columna de símbolos con una flecha apuntando a cada símbolo, como se muestra en la figura. Víctor envuelve cada tira de papel alrededor de un tubo y las pega con cinta adhesiva para que el papel con las letras pueda girar alrededor del tubo pero el papel con los símbolos quede fijo. El papel con las letras se llama *rotor izquierdo* y el papel con las flechas y los símbolos se llama *rotor derecho*.

Víctor sigue los siguientes pasos para codificar sus pistas usando su máquina de cifrado.

1. Gira el rotor izquierdo para que la letra T apunte al símbolo $\diamond$. Esta es la "posición inicial".
2. Codifique la primera letra del mensaje siguiendo la flecha desde la letra hasta el símbolo. Por ejemplo, la letra W se codificaría como $\bigtriangledown$.
3. Gira el rotor izquierdo hacia arriba una posición y codifica la segunda letra del mensaje. Por ejemplo, la letra A se codificaría como $\bullet$.
4. Gira el rotor izquierdo hacia arriba dos posiciones y codifica la tercera letra del mensaje. Por ejemplo, la letra W se codificaría como $\bowtie$.
5. Gira el rotor izquierdo hacia arriba tres posiciones y codifica la cuarta letra del mensaje. Por ejemplo, la letra A se codificaría como $\diamond$.
6. Continúa con el procedimiento de girar el rotor izquierdo hacia arriba n posiciones y codifica la letra $(n+1)$-ésima del mensaje hasta que se hayan codificado todas las letras del mensaje.

Por lo tanto, la pista "WAWA" se codificaría como $\bigtriangledown \bullet \bowtie \diamond$.

Sigue estos pasos para codificar la pista de Víctor "BATCHAWANABAY".

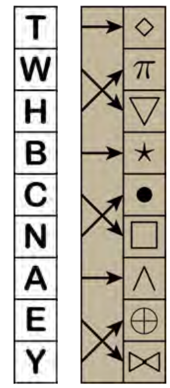
Problema de la Semana

Problema D y Solución

Búsqueda de Tesoros

Problema

Víctor está creando una búsqueda de tesoros para sus hermanos menores en la cual las pistas son todas lugares en Canadá. Para hacerla más difícil, él codifica las pistas con una máquina de cifrado que el creó. Esta máquina consiste de dos tiras de papel, cada una con longitud igual a la circunferencia de un tubo de papel. Un papel contiene una columna de letras y el otro contiene una columna de símbolos con una flecha apuntando a cada símbolo, como se muestra en la figura. Víctor envuelve cada tira de papel alrededor de un tubo y las pega con cinta adhesiva para que el papel con las letras pueda girar alrededor del tubo pero el papel con los símbolos quede fijo. El papel con las letras se llama *rotor izquierdo* y el papel con las flechas y los símbolos se llama *rotor derecho.*



Víctor sigue los siguientes pasos para codificar sus pistas usando su máquina de cifrado.

1. Gira el rotor izquierdo para que la letra T apunte al símbolo $\diamond$. Esta es la "posición inicial".
2. Codifique la primera letra del mensaje siguiendo la flecha desde la letra hasta el símbolo. Por ejemplo, la letra W se codificaría como $\bigtriangledown$.
3. Gira el rotor izquierdo hacia arriba una posición y codifica la segunda letra del mensaje. Por ejemplo, la letra A se codificaría como $\bullet$.
4. Gira el rotor izquierdo hacia arriba dos posiciones y codifica la tercera letra del mensaje. Por ejemplo, la letra W se codificaría como $\bowtie$.
5. Gira el rotor izquierdo hacia arriba tres posiciones y codifica la cuarta letra del mensaje. Por ejemplo, la letra A se codificaría como $\diamond$.
6. Continúa con el procedimiento de girar el rotor izquierdo hacia arriba n posiciones y codifica la letra $(n+1)$-ésima del mensaje hasta que se hayan codificado todas las letras del mensaje.

Por lo tanto, la pista "WAWA" se codificaría como $\bigtriangledown \bullet \bowtie \diamond$.

Sigue estos pasos para codificar la pista de Víctor "BATCHAWANABAY".

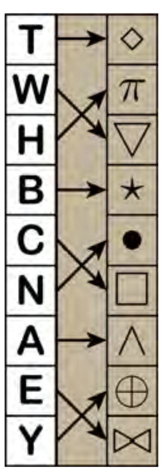
Solución

Sea la posición inicial del rotor izquierdo la Posición 0. Si el rotor izquierdo está en la Posición 1, las letras se han movido hacia arriba una posición con respecto a la posición inicial. Si el rotor izquierdo está en la Posición 2, las letras se han movido hacia arriba 2 posiciones con respecto a la posición inicial. Dado que hay letras 9 en el rotor, se deduce que solo hay posiciones 9 en las que puede estar el rotor izquierdo. Después de mover el rotor izquierdo 9 posiciones hacia arriba, las letras volverán a estar en la posición inicial, o Posición 0. Por lo tanto, después de mover el rotor izquierdo 9 posiciones o más hacia arriba, podemos determinar el número de la posición del rotor izquierdo restando múltiplos de 9 del número total de posiciones movidas hasta obtener un número de posición entre 0 y 8. Esto lo hacemos en la siguiente tabla.

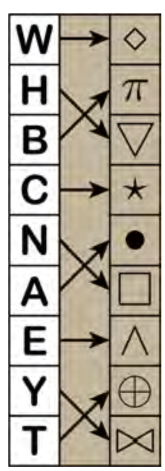
Letra a codificar	Número de posiciones movidas antes de codificar	Número de posición
B	0	0
A	$0+1=1$	1
T	$1+2=3$	3
C	$3+3=6$	6
H	$6+4=10$	$10-9=1$
A	$10+5=15$	$15-9=6$
W	$15+6=21$	$21-18=3$
A	$21+7=28$	$28-27=1$
N	$28+8=36$	$36-36=0$
A	$36+9=45$	$45-45=0$
B	$45+10=55$	$55-54=1$
A	$55+11=66$	$66-63=3$
Y	$66+12=78$	$78-72=6$

Resulta que solo necesitamos cuatro posiciones del rotor izquierdo, las Posiciones 0, 1, 3, y 6. Estas se muestran a continuación.

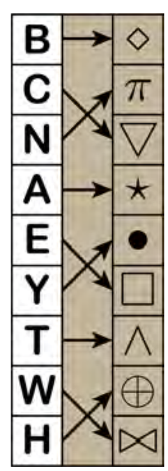
Posición 0



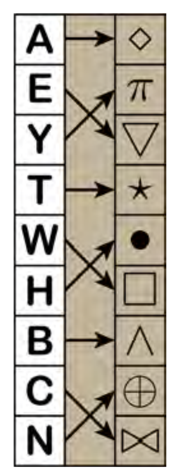
Posición 1



Posición 3



Posición 6



Para codificar la primera letra de la pista "BATCHAWANABAY", el rotor izquierdo inicialmente está en Posición 0 y la B se codifica como $\star$. Para encriptar la segunda letra, el rotor izquierdo está en la Posición 1 y la A se encripta como $\bullet$. De esta forma, podemos encriptar la pista "BATCHAWANABAY" como $\star \bullet \wedge \bowtie \bigtriangledown \diamond \bowtie \bullet \bullet \wedge \pi \star \pi$.

Extensión: En este ejemplo, habían 9 letras en el rotor izquierdo y 9 símbolos en el rotor derecho. El ciclo de posiciones usado en el rotor izquierdo hizo que sólo se usaran las posiciones 0, 1, 3, y 6 del rotor izquierdo. ¿Existe una cantidad de letras en el rotor que requiera que se utilicen todas las posiciones del rotor en el proceso de codificación? Experimenta con diferentes cantidades de letras.

Problema de la Semana

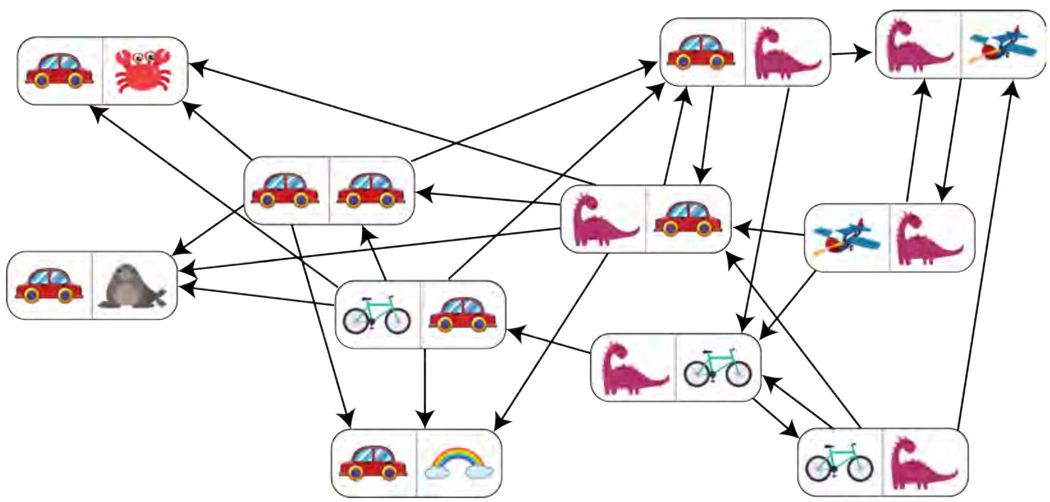
Problema D

Ordenando Cartas

Beto tiene cartas que contienen dos imágenes cada una; una en el lado izquierdo de la carta y otra en el lado derecho de la carta. Beto organiza algunas de estas cartas en una fila de acuerdo con las siguientes reglas.

1. La imagen en el lado derecho de cualquier carta en la fila es la misma que la imagen en el lado izquierdo de la carta a su derecha.
2. Las cartas no se pueden rotar.

El siguiente diagrama muestra todas las cartas de Beto. Las flechas que apuntan de una carta a otra indican las posibles cartas que podrían colocarse a su derecha.



Siguiendo las reglas, ¿cuál es el máximo número de cartas que Beto puede colocar en una fila?

Este problema fue inspirado por un problema de una Beaver Computing Challenge (BCC) pasada.

Problema de la Semana

Problema D y Solución

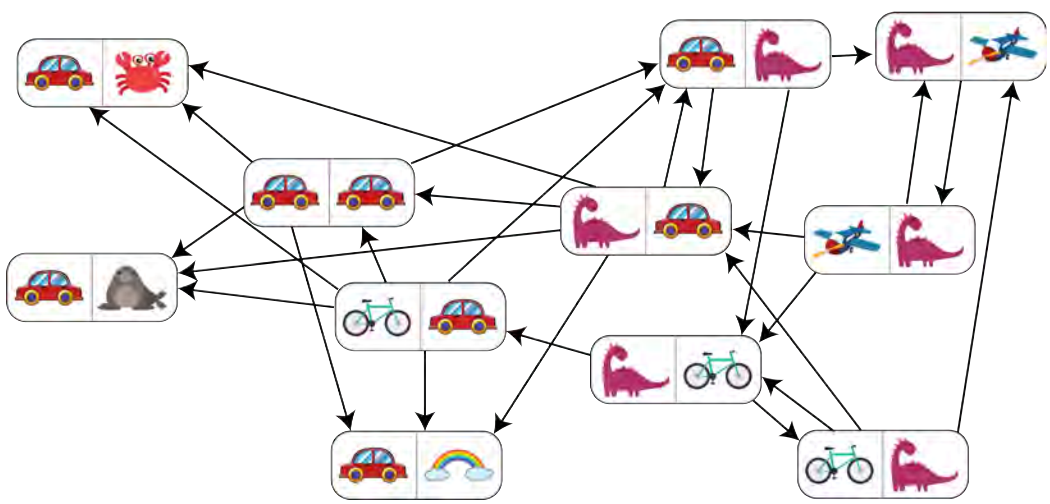
Ordenando Cartas

Problema

Beto tiene cartas que contienen dos imágenes cada una; una en el lado izquierdo de la carta y otra en el lado derecho de la carta. Beto organiza algunas de estas cartas en una fila de acuerdo con las siguientes reglas.

1. La imagen en el lado derecho de cualquier carta en la fila es la misma que la imagen en el lado izquierdo de la carta a su derecha.
2. Las cartas no se pueden rotar.

El siguiente diagrama muestra todas las cartas de Beto. Las flechas que apuntan de una carta a otra indican las posibles cartas que podrían colocarse a su derecha.



Siguiendo las reglas, ¿cuál es el máximo número de cartas que Beto puede colocar en una fila?

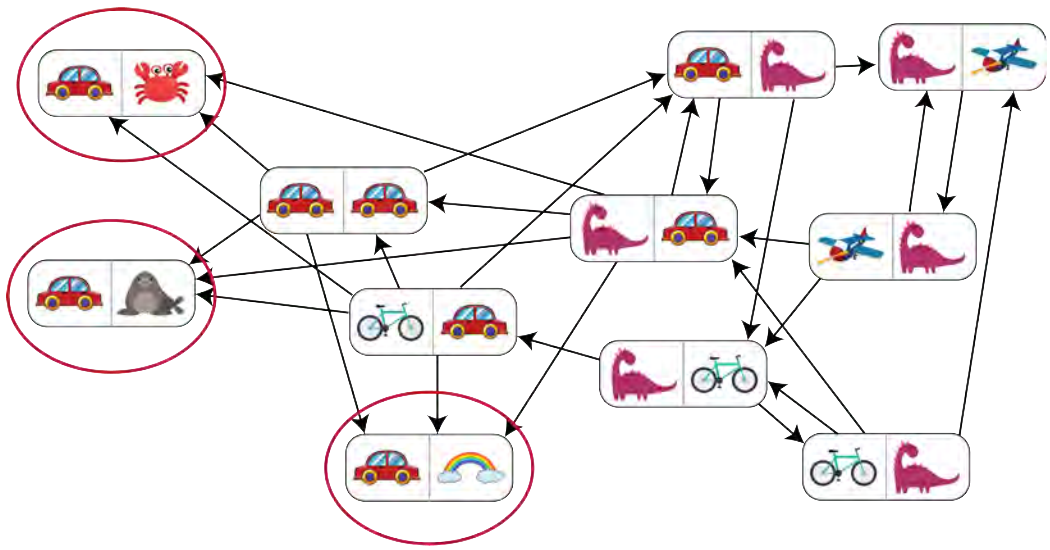
Este problema fue inspirado por un problema de una Beaver Computing Challenge (BCC) pasada.

Solución

Siguiendo las reglas, Beto puede colocar 9 cartas en una fila. A continuación se muestra un ejemplo de una fila de 9 cartas.

Ten en cuenta que es posible encontrar otras filas de 9 cartas.

Para determinar si podemos o no colocar más de 9 cartas en una fila, mira las tres cartas en círculos en el diagrama de abajo.



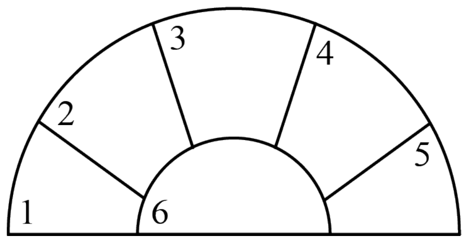
En el diagrama, no hay flechas que salgan de ninguna de estas tres cartas porque la imagen en el lado derecho de cada una de las cartas no está en el lado izquierdo de ninguna otra carta. De ello se deduce que si se utiliza alguna de estas cartas, debe ser la carta más a la derecha de la fila. Sin embargo, cualquier fila que cree Beto puede contener solo una carta más a la derecha, por lo que no se pueden usar al menos dos de estas cartas. Por lo tanto, el número máximo de cartas que Beto puede colocar en una fila es 9.

Problema de la Semana

Problema D

Agregando Color

Finn y Vidya juegan un juego en el que se turnan para colorear regiones en el diagrama que se muestra debajo. Ellos colorean las regiones de rojo o azul. En su turno, cada jugador colorea una región del diagrama que no limita con otra región del mismo color.



Después de una cierta cantidad de turnos, no será posible colorear más regiones y el juego habrá terminado. El ganador es el jugador que coloreó la última región.

Finn fue primero. En su turno, coloreó de azul la región 3, por lo que después de su turno el diagrama se colorea de la siguiente manera.

Ahora es el turno de Vidya y quedan cinco regiones. Determine todas las posibilidades para el color que Vidya debe usar y la región que debe elegir para garantizar que gane el juego, independientemente de lo que haga Finn en sus turnos restantes.

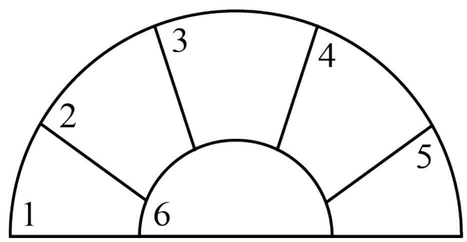
Problema de la Semana

Problema D y Solución

Agregando Color

Problema

Finn y Vidya juegan un juego en el que se turnan para colorear regiones en el diagrama que se muestra debajo. Ellos colorean las regiones de rojo o azul. En su turno, cada jugador colorea una región del diagrama que no limita con otra región del mismo color.



Después de una cierta cantidad de turnos, no será posible colorear más regiones y el juego habrá terminado. El ganador es el jugador que coloreó la última región.

Finn fue primero. En su turno, coloreó de azul la región 3, por lo que después de su turno el diagrama se colorea de la siguiente manera.

Ahora es el turno de Vidya y quedan cinco regiones. Determine todas las posibilidades para el color que Vidya debe usar y la región que debe elegir para garantizar que gane el juego, independientemente de lo que haga Finn en sus turnos restantes.

Solución

Si Vidya colorea la región 6 de rojo en su primer turno, tendrá la garantía de ganar el juego, independientemente de lo que haga Finn en los turnos restantes. Primero mostraremos por qué esto es cierto y luego mostraremos por qué todos los demás movimientos posibles no garantizarán una victoria para Vidya.

Si Vidya colorea la región 6 de rojo, entonces los únicos movimientos restantes posibles son colorear la región 1 azul o colorear la región 5 azul. Como estos movimientos no se afectan entre sí, Finn coloreará una de estas regiones y Vidya coloreará la otra y ganará el juego.

Los otros movimientos posibles para Vidya son colorear la región 1 o 5 azul, o colorear la región 1, 2, 4, o 5 rojo.

- Si Vidya coloreó la región 1 de azul, entonces Finn podría colorear la región 4 de rojo. Por lo tanto, los únicos movimientos restantes posibles serían colorear la región 2 de rojo o colorear la región 5 azul. Como estos movimientos no se afectan entre sí, Vidya colorearía una de estas regiones y Finn colorearía la otra y ganaría el juego.
- Si Vidya coloreó la región 5 de azul, entonces Finn podría colorear la región 2 de rojo. Por lo tanto, los únicos movimientos restantes posibles serían colorear la región 4 de rojo o colorear la región 1 azul. Como estos movimientos no se afectan entre sí, Vidya colorearía una de estas regiones y Finn colorearía la otra y ganaría el juego.
- Si Vidya colorea la región 1 de rojo, entonces Finn podría colorear la región 5 de rojo y ganar el juego.
- Si Vidya colorea la región 5 de rojo, entonces Finn podría colorear la región 1 de rojo y ganar el juego.
- Si Vidya coloreó la región 2 de rojo, entonces Finn podría colorear la región 5 de azul. Por lo tanto, los únicos movimientos restantes posibles serían colorear la región 4 de rojo o colorear la región 1 azul. Como estos movimientos no se afectan entre sí, Vidya colorearía una de estas regiones y Finn colorearía la otra y ganaría el juego.
- Si Vidya coloreó la región 4 de rojo, entonces Finn podría colorear la región 1 de azul. Por lo tanto, los únicos movimientos restantes posibles serían colorear la región 2 de rojo o colorear la región 5 azul. Como estos movimientos no se afectan entre sí, Vidya colorearía una de estas regiones y Finn colorearía la otra y ganaría el juego.

Por lo tanto, colorear la región 6 de rojo es el único movimiento que Vidya puede hacer para garantizar que gane el juego, independientemente de lo que haga Finn en sus turnos restantes.