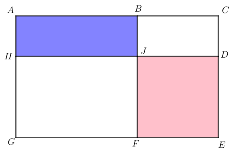


Problema de la Semana

Problema D y Solución

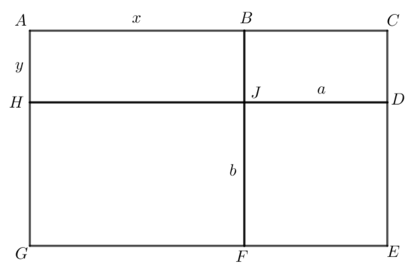
Halla el Área Más Grande

Problema

El rectángulo $ACEG$ tiene B en AC y F en EG tal que BF es paralelo a CE. Además, D está en CE y H está en AG de modo que HD es paralelo a AC y BF intersecta a HD en J. El área del rectángulo $ABJH$ es 6 cm^2 y el área del rectángulo $JDEF$ es 15 cm^2.

Si las dimensiones de los rectángulos $ABJH$ y $JDEF$, en centímetros, son números enteros, determina el área más grande posible del rectángulo $ACEG$.

Solución



Sea $AB = x$, $AH = y$, $JD = a$ and $JF = b$.
Entonces,

$$\begin{aligned} HJ &= GF = AB = x \\ BJ &= CD = AH = y \\ BC &= FE = JD = a \\ HG &= DE = JF = b \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} \text{área}(ACEG) &= \text{área}(ABJH) + \text{área}(BCDJ) + \text{área}(JDEF) + \text{área}(HJFG) \\ &= 6 + ya + 15 + xb \\ &= 21 + ya + xb \end{aligned}$$

Dado que el área del rectángulo $ABJH$ es 6 cm^2 y las longitudes de los lados de $ABJH$ son números enteros, entonces las longitudes de los lados deben ser 1 y 6 o 2 y 3. Es decir, $x = 1$ cm y $y = 6$ cm, $x = 6$ cm y $y = 1$ cm, $x = 2$ cm y $y = 3$ cm, o $x = 3$ cm y $y = 2$ cm.

Dado que el área del rectángulo $JDEF$ es 15 cm^2 y las longitudes de los lados de $JDEF$ son números enteros, entonces las longitudes de los lados deben ser 1 y 15 o 3 y 5. Es decir, las opciones son: $a = 1$ cm y $b = 15$ cm, $a = 15$ cm y $b = 1$ cm, $a = 3$ cm y $b = 5$ cm, o $a = 5$ cm y $b = 3$ cm.

Para maximizar el área, debemos elegir los valores de x, y, a y b que hacen que $ya + xb$ sea lo más grande posible. Ahora dividiremos los casos según las posibles longitudes de los lados de $ABJH$ y $JDEF$ y calcularemos el área de $ACEG$ en cada caso. No necesitamos probar todos los 16 pares posibles, porque probar $x = 1$ cm y $y = 6$ cm con las cuatro posibilidades de a y b dará las mismas 4 áreas, en algún orden, como probar $x = 6$ cm y $y = 1$ cm con las cuatro posibilidades de a y b. De manera similar, intentar $x = 2$ cm y $y = 3$ cm con las cuatro posibilidades de a y b dará las mismas 4 áreas, en algún orden, que intentar $x = 3$ cm y $y = 2$ cm con las cuatro posibilidades de a y b. (Como ejercicio, analiza por qué esto es cierto).

- **Caso 1:** $x = 1$ cm, $y = 6$ cm, $a = 1$ cm, $b = 15$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 6(1) + 1(15) = 42$ cm^2.
- **Caso 2:** $x = 1$ cm, $y = 6$ cm, $a = 15$ cm, $b = 1$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 6(15) + 1(1) = 112$ cm^2.
- **Caso 3:** $x = 1$ cm, $y = 6$ cm, $a = 3$ cm, $b = 5$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 6(3) + 1(5) = 44$ cm^2.
- **Caso 4:** $x = 1$ cm, $y = 6$ cm, $a = 5$ cm, $b = 3$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 6(5) + 1(3) = 54$ cm^2.
- **Caso 5:** $x = 2$ cm, $y = 3$ cm, $a = 1$, $b = 15$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 3(1) + 2(15) = 54$ cm^2.
- **Caso 6:** $x = 2$ cm, $y = 3$ cm, $a = 15$, $b = 1$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 3(15) + 2(1) = 68$ cm^2.
- **Caso 7:** $x = 2$ cm, $y = 3$ cm, $a = 3$, $b = 5$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 3(3) + 2(5) = 40$ cm^2.
- **Caso 8:** $x = 2$ cm, $y = 3$ cm, $a = 5$, $b = 3$ cm
  En este caso área$(ACEG) = 21 + ya + xb = 21 + 3(5) + 2(3) = 42$ cm^2.

Vemos que el área máxima es 112 cm^2, y ocurre cuando $x = 1$ cm, $y = 6$ cm y $a = 15$ cm, $b = 1$ cm. También ocurrirá cuando $x = 6$ cm, $y = 1$ cm y $a = 1$ cm, $b = 15$ cm.

Los siguientes diagramas muestran los valores calculados para x, y, a, b colocados en el diagrama original. ¡El diagrama dado en el problema definitivamente no fue dibujado a escala! Ambas soluciones producen rectángulos con dimensiones de 7 cm por 16 cm y un área de 112 cm^2.