



## Problema de la Semana

### Problema D y Solución

#### El Viaje de Profesores

#### Problema

Para ayudar a pasar el tiempo en un largo viaje en autobús, un grupo de profesores de matemáticas creó una secuencia de números, en la que cada profesor decía un término de la secuencia. El primer y el segundo maestro dijeron cada uno un número entero no negativo, y cada maestro después de eso dijo la suma de todos los términos anteriores en la secuencia.

Por ejemplo, si el primer maestro dijo el número 2 y el segundo maestro dijo el número 8, entonces

- el tercer profesor diría la suma del primer y segundo término, que es  $2 + 8 = 10$ , y
- el cuarto profesor diría la suma del primer, segundo y tercer término, que es  $2 + 8 + 10 = 20$ .

¿Cuántas secuencias posibles podrían haber dicho los maestros si el primer maestro dijo el número 3 y otro maestro dijo el número 3072?

#### Solución

Sabemos cómo construir la secuencia y sabemos que el primer término es 3, pero ¿dónde está el término cuyo valor es 3072?

- ¿Podría 3072 ser el segundo término?

Si los primeros dos términos son 3 y 3072, entonces podemos calcular los siguientes términos.

- El tercer término sería  $3 + 3072 = 3075$ .
- El cuarto término sería  $3 + 3072 + 3075 = 3075 + 3075 = 2(3075) = 6150$ .
- El quinto término sería  $3 + 3072 + 3075 + 6150 = 6150 + 6150 = 2(6150) = 12300$ .

Vemos que podemos determinar cualquier término más allá del tercer término sumando todos los términos anteriores, o simplemente podemos duplicar el término inmediatamente anterior al requerido, ya que ese término es la suma de todos los términos anteriores. (Esto también significa que si se conoce algún término después del tercero, entonces el término anterior es la mitad del valor de ese término).



Por lo tanto, hay una sucesión posible con 3072 como segundo término. Los primeros 6 términos de esta sucesión son 3, 3072, 3075, 6150, 12300, 24600.

- ¿Podría 3072 ser el tercer término?

Sí, dado que el tercer término es la suma de los dos primeros términos, y el primer término es 3, entonces el segundo término sería  $3072 - 3 = 3069$  y los primeros 6 términos de esta secuencia son 3, 3069, 3072, 6144, 12288, 24576.

- ¿Podría 3072 ser el cuarto término?

Sí, dado que el cuarto término es par, entonces podemos determinar que el tercer término es la mitad del cuarto término, que es  $3072 \div 2 = 1536$ , entonces el segundo término sería  $1536 - 3 = 1533$ . Los primeros 6 términos de esta secuencia son 3, 1533, 1536, 3072, 6144, 12288.

- ¿Podría 3072 ser el quinto término?

Para pasar del quinto término al tercer término dividiríamos por 2 dos veces, o podríamos dividir por 4. Si el tercer término resultante es un número entero no negativo mayor o igual que 3, entonces la secuencia existe. El tercer término sería  $3072 \div 4 = 768$ , y el segundo término sería  $768 - 3 = 765$ . Así existe la sucesión y los primeros 6 términos son 3, 765, 768, 1536, 3072, 6144.

Podríamos continuar de esta manera hasta que descubramos todas las sucesiones posibles que se forman de acuerdo con las reglas dadas con el primer término 3 y 3072 en algún lugar de la sucesión. Sin embargo, si observamos la descomposición en factores primos de 3072 vemos que la potencia más alta de 2 que divide a 3072 es 1024 (o  $2^{10}$ ), ya que  $3072 = 2^{10} \times 3$ . De hecho, dividir 3072 entre 1024 produciría un tercer término que sería 3. El segundo término sería entonces 0, un número entero no negativo, y la secuencia resultante sería 3, 0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536, 3072, 6144, ...

Si dividimos 3072 por cualquier potencia entera de 2, de  $2^0 = 1$  a  $2^{10} = 1024$ , el tercer término resultante sería un número entero mayor que o igual a 3, y 3072 aparecerían en cada una de estas secuencias. Hay 11 tales secuencias. El número 3072 aparecería en algún lugar entre el término 3 y el término 13 en la secuencia aceptable. Sin embargo, 3072 también puede aparecer como segundo término, por lo que hay un total de 12 secuencias posibles.



¿Podría ser 3072 el decimocuarto término? Del decimocuarto término al tercer término tendríamos que dividir 3072 entre  $2^{11}$ . El tercer término resultante sería  $\frac{3}{2}$ . Esto significaría que el segundo término no es un número entero y, por lo tanto, la secuencia no es posible.

Por lo tanto, hay un total de 12 secuencias posibles.