



Problema de la Semana

Problema D y Solución

Sin Potencias de 2

Problema

Se colocan cinco bolas en una bolsa. Cada bola está etiquetada con 2, 4, 6, 8 o 10, y ninguna bola tiene el mismo número que otra. Abigail elige una pelota al azar, anota el número entero de la pelota y vuelve a colocar la pelota en la bolsa. Luego, Bob elige una pelota al azar, anota el número entero en la pelota y vuelve a colocar la pelota en la bolsa. Finalmente, Carlos elige una pelota al azar, anota el número entero de la pelota y vuelve a colocar la pelota en la bolsa. Determina la probabilidad de que el producto de los tres enteros anotados no sea una potencia de 2.

Solución

Solución 1

Una forma de resolver este problema es hacer una lista de todas las opciones posibles, calcular el producto de cada opción y luego contar la cantidad de productos que no son una potencia de 2. Si lo hiciéramos, encontraríamos que hay 125 opciones posibles. De estos, 98 dan como resultado un producto que no es una potencia de 2.

Por lo tanto, la probabilidad de que el producto no sea un producto de 2 es $\frac{98}{125}$. En las Soluciones 2 y 3, veremos formas más eficientes de calcular esta probabilidad.

Solución 2

Cuando se calcula el producto de los tres enteros, el producto es una potencia de 2 o no es una potencia de 2. Por lo tanto, para determinar el número de opciones que dan como resultado un producto que no es una potencia de 2, contaremos el número de opciones que dan como resultado un producto que es una potencia de 2 y lo restamos del número total de opciones.

Ya que Abigail, Bob y Carlos tienen cada uno cinco enteros posibles que pueden elegir, hay $5 \times 5 \times 5 = 125$ elecciones posibles de enteros. Para que el producto de los tres enteros sea una potencia de 2, no puede tener factores primos distintos de 2. En particular, esto significa que cada uno de los tres enteros elegidos debe ser una potencia de 2. Hay tres bolas etiquetadas con una potencia de 2: 2, 4 y 8. Por lo tanto, el número de opciones que resultan en una potencia de 2 es $3 \times 3 \times 3 = 27$.

Dado que hay 27 opciones que dan un producto que es una potencia de 2, deben haber $125 - 27 = 98$ opciones que dan un producto que no es una potencia de 2. Por lo tanto, la probabilidad de que el producto no sea una potencia de 2 es $\frac{98}{125}$.

Solución 3

Cuando se calcula el producto de los tres enteros, el producto es una potencia de 2 o no es una potencia de 2. Si p es la probabilidad de que el producto sea una potencia de 2 y q es la probabilidad de que el producto no sea una potencia de 2, entonces $p + q = 1$. Por lo tanto, podemos calcular q calculando p y notando que $q = 1 - p$.

Para que el producto de los tres enteros sea una potencia de 2, no puede tener factores primos distintos de 2. En particular, esto significa que cada uno de los tres enteros debe ser una potencia de 2. Hay tres bolas etiquetadas con una potencia de 2: 2, 4 y 8. Por lo tanto, la



probabilidad de elegir al azar una pelota con una etiqueta que sea potencia de 2 es $\frac{3}{5}$. Como Abigail, Bob y Carlos eligen sus números enteros de forma independiente, entonces la probabilidad de que cada uno elija una potencia de 2 es $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$. En otras palabras, $p = \frac{27}{125}$, entonces $q = 1 - p = 1 - \frac{27}{125} = \frac{98}{125}$. Por lo tanto, la probabilidad de que el producto no sea una potencia de 2 es $\frac{98}{125}$.