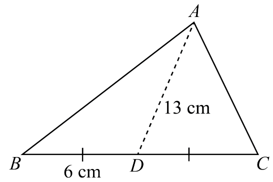



# Problema de la Semana

## Problema D y Solución

## Dos Lados Conocidos

### Problema

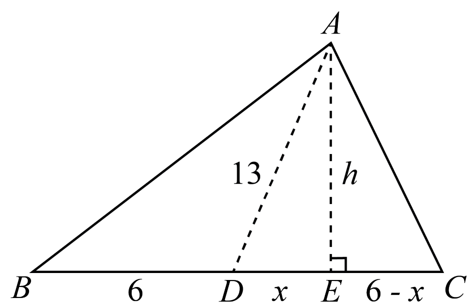
La *mediana* es un segmento de recta trazado desde el vértice de un triángulo hasta el punto medio de su lado opuesto.

En el $\triangle ABC$, se traza la mediana desde el vértice $A$, que toca al lado $BC$ en el punto $D$. La longitud de $BD$ es 6 cm y la longitud de la mediana $AD$ es 13 cm.

El área del $\triangle ABC$ es 72 cm$^2$. Determina las longitudes de los lados $AB$ y $AC$.

### Solución

Primero vamos a trazar la altura desde el vértice $A$, que se encuentra con el lado $BC$ en el punto $E$. Sea $h$ la longitud de la altura $AE$. Sea $x$ la longitud de $DE$. Como $AD$ es una mediana, $DC = BD = 6$. Dado que $E$ está en $DC$ y la longitud de $DE$ es $x$, la longitud de $EC$ es $6 - x$.




Sabemos que el área del $\triangle ABC$ es 72 cm$^2$. Además, dado que $BD = DC = 6$ cm, se sigue que $BC = 12$ cm. De este modo,

$$\begin{aligned} \frac{BC \times AE}{2} &= 72 \\ \frac{12h}{2} &= 72 \\ h &= 12 \end{aligned}$$

Puesto que $\triangle AED$ es un triángulo rectángulo, el Teorema de Pitágoras nos permite concluir lo siguiente.

$$\begin{aligned} DE^2 + AE^2 &= AD^2 \\ x^2 + 12^2 &= 13^2 \\ x^2 &= 13^2 - 12^2 \\ x^2 &= 169 - 144 = 25 \end{aligned}$$

Como $x > 0$, tenemos que $x = 5$ cm. Así que $BE = 6 + x = 6 + 5 = 11$ cm y $EC = 6 - x = 6 - 5 = 1$ cm.

Puesto que $\triangle AEB$ es un triángulo rectángulo, el Teorema de Pitágoras nos permite concluir lo siguiente.

$$\begin{aligned} AE^2 + BE^2 &= AB^2 \\ 12^2 + 11^2 &= AB^2 \\ AB^2 &= 144 + 121 = 265 \end{aligned}$$

Como $AB > 0$, concluimos que $AB = \sqrt{265}$ cm.

Puesto que $\triangle AEC$ es un triángulo rectángulo, el Teorema de Pitágoras nos permite concluir lo siguiente.

$$\begin{aligned} AE^2 + EC^2 &= AC^2 \\ 12^2 + 1^2 &= AC^2 \\ AC^2 &= 144 + 1 = 145 \end{aligned}$$

Como $AB > 0$, concluimos que $AC = \sqrt{145}$ cm.

Por lo tanto, las longitudes de los lados $AB$ y $AC$ son $\sqrt{265}$ cm y $\sqrt{145}$ cm, respectivamente. Estas longitudes son aproximadamente iguales a 16.3 cm y 12.0 cm respectivamente.