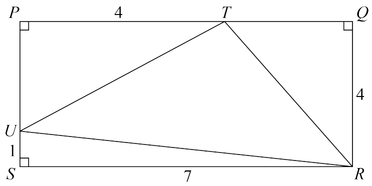


Problema de la Semana
Problema D y Solución
Muchas Maneras de Concluir

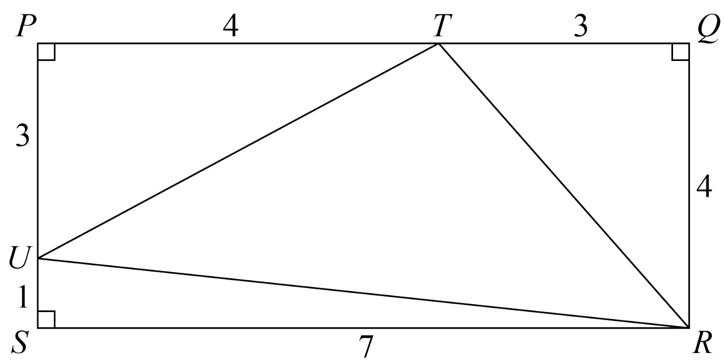
Problema

El rectángulo $PQRS$ tiene $QR = 4$ y $RS = 7$. El $\triangle TRU$ está inscrito en el rectángulo $PQRS$ con T en PQ tal que $PT = 4$, y U en PS tal que $SU = 1$.

Determina el valor de $\angle RUS + \angle PUT$. Hay muchas maneras de resolver este problema. Después de haberlo resuelto, mira si puedes resolverlo de otra manera.

Solución

Como $PQRS$ es un rectángulo, $PQ = RS$, entonces $TQ = 3$. Del mismo modo $PS = QR$, entonces $PU = 3$.



Ahora presentaremos tres soluciones diferentes. La primera usa el Teorema de Pitágoras, la segunda usa triángulos congruentes y la tercera usa trigonometría básica.

Solución 1

Como el $\triangle UPT$ tiene un ángulo recto en P, podemos aplicar el Teorema de Pitágoras para encontrar que $UT^2 = PU^2 + PT^2 = 3^2 + 4^2 = 25$. Por lo tanto, $UT = 5$, ya que $UT > 0$.

De manera similar, dado que el $\triangle TQR$ tiene un ángulo recto en Q, podemos aplicar el Teorema de Pitágoras para encontrar que $TR = 5$.

Como el $\triangle RSU$ tiene un ángulo recto en S, podemos aplicar el Teorema de Pitágoras para encontrar que $UR^2 = RS^2 + SU^2 = 7^2 + 1^2 = 50$ y así $UR = \sqrt{50}$, ya que $UR > 0$.

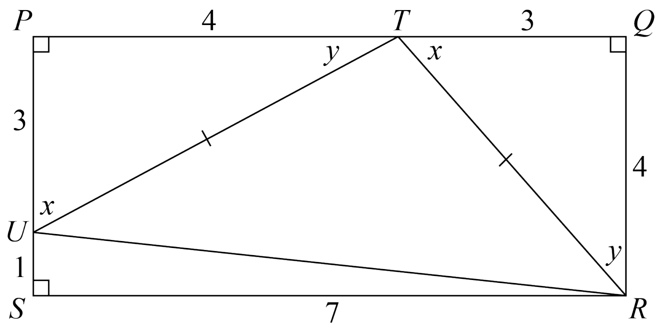
En el $\triangle TRU$, observa que $UT^2 + TR^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50 = UR^2$. Por lo tanto, $\triangle TRU$ es un triángulo rectángulo, con $\angle UTR = 90^\circ$. Además, dado que $UT = TR = 5$, $\triangle TRU$ es un triángulo rectángulo isósceles, entonces $\angle TUR = \angle TRU = 45^\circ$.

Los ángulos en línea recta suman 180°, por lo que tenemos $\angle RUS + \angle TUR + \angle PUT = 180^\circ$.

Dado que $\angle TUR = 45^\circ$, tenemos que $\angle RUS + 45^\circ + \angle PUT = 180^\circ$, y así $\angle RUS + \angle PUT = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Por lo tanto, $\angle RUS + \angle PUT = 135^\circ$.

Solución 2

En los triángulos $\triangle UPT$ y $\triangle TQR$, tenemos $PT = QR = 4$, $PU = TQ = 3$, y $\angle UPT = \angle TQR = 90^\circ$. Por lo tanto $\triangle UPT \cong \triangle TQR$ por congruencia del triángulo lado-ángulo-lado. De la congruencia de triángulos se sigue que $UT = TR$, $\angle QTR = \angle PUT$, y $\angle TRQ = \angle PTU$. Sean $\angle QTR = \angle PUT = x$ y $\angle TRQ = \angle PTU = y$.



Dado que los ángulos en un triángulo suman 180°, en triángulo rectángulo $\triangle UPT$, $\angle PUT + \angle PTU = 90^\circ$. Es decir, $x + y = 90^\circ$.

Dado que los ángulos en línea recta suman 180°, $\angle PTU + \angle UTR + \angle QTR = 180^\circ$. Es decir, $y + \angle UTR + x = 180^\circ$. Sustituyendo $x + y = 90^\circ$, obtenemos $90^\circ + \angle UTR = 180^\circ$, y concluimos que $\angle UTR = 90^\circ$.

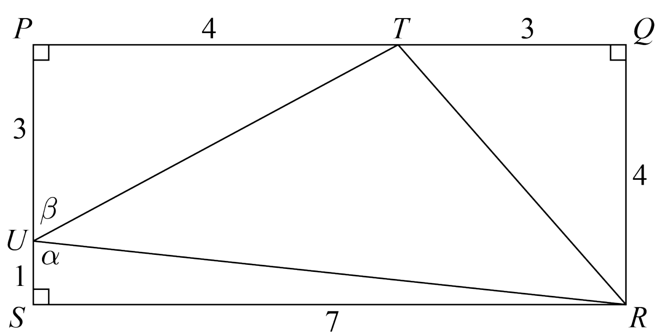
Dado que $UT = TR$ y $\angle UTR = 90^\circ$, $\triangle TRU$ es un triángulo rectángulo isósceles y entonces $\angle TUR = \angle TRU = 45^\circ$.

Los ángulos en línea recta suman 180°, por lo que tenemos $\angle RUS + \angle TUR + \angle PUT = 180^\circ$.

Dado que $\angle TUR = 45^\circ$, tenemos que $\angle RUS + 45^\circ + \angle PUT = 180^\circ$, y así $\angle RUS + \angle PUT = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Por lo tanto, $\angle RUS + \angle PUT = 135^\circ$.

Solución 3

Sean $\angle RUS = \alpha$ y $\angle PUT = \beta$.



Usando trigonometría básica, a partir del triángulo rectángulo $\triangle RSU$, tenemos $\tan\alpha = \frac{7}{1} = 7$, y entonces $\alpha = \tan^{-1}(7)$. De manera similar, a partir del $\triangle UPT$ de ángulo recto, tenemos $\tan\beta = \frac{4}{3}$, y así $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$.

Entonces $\angle RUS + \angle PUT = \alpha + \beta = \tan^{-1}(7) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 135^\circ$.

Por lo tanto, $\angle RUS + \angle PUT = 135^\circ$.

Esta tercera solución es muy eficiente y concisa. Sin embargo, parte de la belleza se pierde como resultado de esta solución directa.