Problema de la Semana

Problema D y Solución

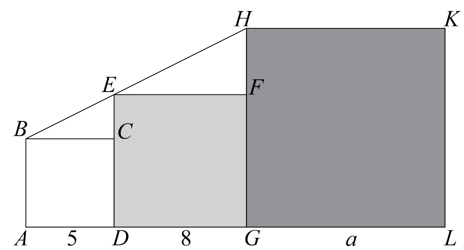
El Cuadrado Más Grande

Problema

Se colocan tres cuadrados uno al lado del otro con el cuadrado más pequeño a la izquierda y el cuadrado más grande a la derecha. Los lados inferiores de los tres cuadrados forman una línea horizontal. La longitud del lado del cuadrado más pequeño es 5 unidades, y la longitud del lado del cuadrado mediano es 8 unidades. Si la esquina superior izquierda de cada cuadrado está en línea recta, determina la longitud del lado del cuadrado más grande.

Solución

Primero dibujamos un segmento de línea que conecta la esquina superior izquierda de cada cuadrado y etiquetamos los vértices como se muestra en el diagrama. Decimos que a es la longitud del lado del cuadrado más grande.



Presentamos tres soluciones diferentes.

En la Solución 1, resolvemos el problema calculando la pendiente de BH. En la Solución 2, resolvemos el problema usando triángulos semejantes. En la Solución 3, colocamos el diagrama en el plano xy y resolvemos el problema usando geometría analítica.

Solución 1

La pendiente de una recta es igual a su cambio vertical dividido por su cambio horizontal. Si miramos el segmento de línea de B a E, $BC = 5$ y $CE = DE - DC = 8 - 5 = 3$. Por lo tanto, la pendiente de BE es $\frac{CE}{BC} = \frac{3}{5}$.

En el segmento de recta de E a H, $EF = 8$ y $FH = GH - GF = a - 8$. Por lo tanto, la pendiente EH es $\frac{FH}{EF} = \frac{a-8}{8}$.

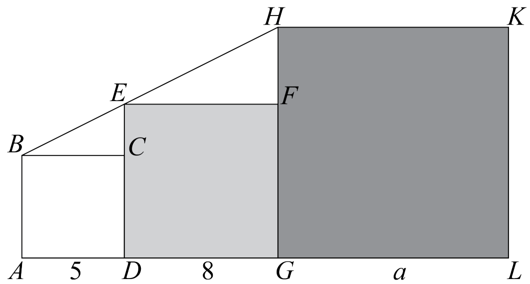
Dado que B, E, y H se encuentran en una línea recta, la pendiente de BE debe ser igual a la pendiente de EH. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{3}{5} &= \frac{a-8}{8} \\
5(a-8) &= 3(8) \\
5a - 40 &= 24 \\
5a &= 64 \\
a &= \frac{64}{5}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la longitud del lado del cuadrado más grande es $\frac{64}{5}$ unidades.

Solución 2

Considera el $\triangle BCE$ y $\triangle EFH$. Primero mostraremos que $\triangle BCE \sim \triangle EFH$.



Como $ABCD$ es un cuadrado, $\angle BCD = 90°$. Por lo tanto, $\angle BCE = 180° - \angle BCD = 180° - 90° = 90°$. Como $DEFG$ es un cuadrado, $\angle EFG = 90°$. Por lo tanto, $\angle EFH = 180° - \angle EFG = 180° - 90° = 90°$. Consecuentemente, $\angle BCE = \angle EFH$.

Como $ABCD$ y $DEFG$ son cuadrados y AG es una línea recta, BC es paralela a EF. Por lo tanto, $\angle EBC$ y $\angle HEF$ son ángulos correspondientes y entonces $\angle EBC = \angle HEF$.

Dado que los ángulos en un triángulo suman $180°$, entonces también debemos tener $\angle BEC = \angle EHF$.

Entonces, $\triangle BCE \sim \triangle EFH$, por semejanza de triángulo ángulo-ángulo-ángulo.

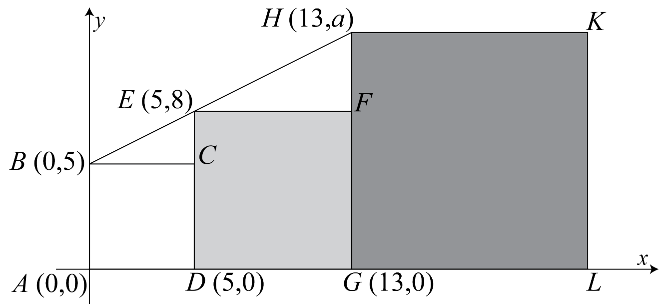
Dado que $\triangle BCE \sim \triangle EFH$, las longitudes de los lados correspondientes son proporcionales. En particular,

$$\begin{aligned}
\frac{EC}{BC} &= \frac{HF}{EF} \\
\frac{DE - DC}{BC} &= \frac{GH - GF}{EF} \\
\frac{8-5}{5} &= \frac{a-8}{8} \\
\frac{3}{5} &= \frac{a-8}{8} \\
5(a-8) &= 3(8) \\
5a - 40 &= 24 \\
5a &= 64 \\
a &= \frac{64}{5}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la longitud del lado del cuadrado más grande es $\frac{64}{5}$ unidades.

Solución 3

Empezamos colocando el diagrama en el plano xy con A en $(0,0)$ y AL a lo largo del eje x.



Las coordenadas de B son $(0,5)$, las coordenadas de D son $(5,0)$, las coordenadas de E son $(5,8)$, las coordenadas de G son $(13,0)$, y las coordenadas de H son $(13,a)$.

Vamos a determinar la ecuación de la recta que pasa por B, E y H.

Como esta recta pasa por $(0,5)$, debe de tener un punto de intersección con y de 5 unidades. Como la recta pasa por $(0,5)$ y $(5,8)$, tiene una pendiente de $\frac{8-5}{5-0} = \frac{3}{5}$. Por lo tanto, la ecuación de la recta que pasa por B, E y H es $y = \frac{3}{5}x + 5$.

Como $H(13,a)$ se encuentra en esta línea, sustituyendo $x = 13$ y $y = a$ en $y = \frac{3}{5}x + 5$ nos da

$$a = \frac{3}{5}(13) + 5 = \frac{39}{5} + 5 = \frac{39+25}{5} = \frac{64}{5}$$

Por lo tanto, la longitud del lado del cuadrado más grande es $\dfrac{64}{5}$ unidades.