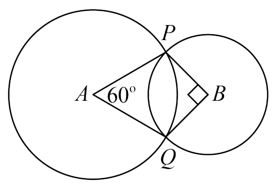


Problema de la Semana

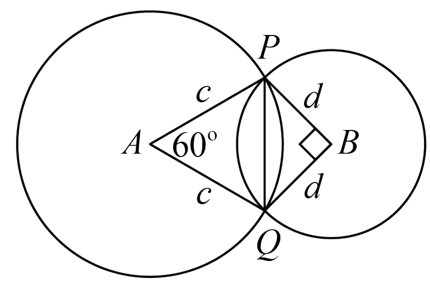
Problema D y Solución

La Otra Área

Problema

Dos circunferencias, una de centro A y otra de centro B, se cortan en los puntos P y Q tales que $\angle PAQ = 60^\circ$ y $\angle PBQ = 90^\circ$. Si el área del círculo con centro A es $48\,\mathrm{m}^2$, ¿cuál es el área del círculo con centro B?

Solución



Sean c el radio de la circunferencia de centro A, en metros, y d el radio de la circunferencia de centro B, en metros. Unimos P a Q. Determinaremos la longitud de PQ en términos de c y luego en términos de d para encontrar una relación entre c y d.

Consideramos $\triangle APQ$. Como $AP = AQ = c$, $\triangle APQ$ es isósceles y por lo tanto $\angle APQ = \angle AQP$. El problema dice que $\angle PAQ = 60^\circ$, $\angle APQ = \angle AQP = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$. Por lo tanto, $\triangle APQ$ es equilátero y $PQ = AP = AQ = c$.

Consideramos $\triangle BPQ$. El problema dice que $\angle PBQ = 90^\circ$. Por lo tanto, $\triangle BPQ$ es un triángulo rectángulo. El teorema de Pitágoras nos dice que $PQ^2 = BP^2 + BQ^2 = d^2 + d^2 = 2d^2$.

Tenemos $PQ = c$ y $PQ^2 = 2d^2$. Por lo tanto, $c^2 = 2d^2$.

El área del círculo con centro B y radio d es πd^2.

El área del círculo con centro A y radio c es πc^2. Sabemos que esta área es igual a $48\,\mathrm{m}^2$. Entonces,

$$\begin{aligned} 48 &= \pi c^2 \\ 48 &= \pi(2d^2) \\ 48 &= 2\pi d^2 \\ 24 &= \pi d^2 \end{aligned}$$

Por tanto, el área del círculo de centro B es $24\,\mathrm{m}^2$.