

## Problema de la Semana

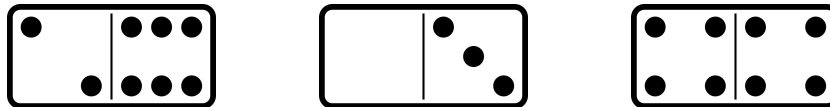
### Problema D y Solución

#### La Ficha Perdida

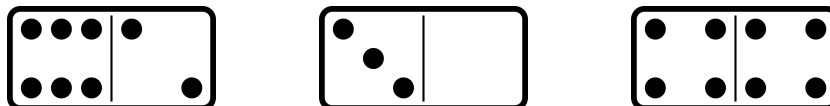
#### Problema

Una ficha de dominó es una ficha rectangular con una línea que divide su cara en dos extremos cuadrados. Cada extremo está marcado con una serie de puntos o está completamente en blanco.

La primera ficha de dominó que se muestra a continuación es una ficha de dominó de  $[2, 6]$ , ya que tiene 2 puntos en su extremo izquierdo y 6 puntos en su extremo derecho. La segunda ficha de dominó que se muestra a continuación es una ficha de dominó de  $[0, 3]$ , ya que tiene 0 puntos en su extremo izquierdo y 3 puntos en su extremo derecho. El tercer dominó que se muestra a continuación es un dominó de  $[4, 4]$ , ya que tiene 4 puntos en su extremo izquierdo y 4 puntos en su extremo derecho.



También podemos rotar las fichas de dominó. La primera ficha de dominó que se muestra a continuación es una ficha de dominó de  $[6, 2]$ , ya que tiene 6 puntos en su extremo izquierdo y 2 puntos en su extremo derecho. Sin embargo, dado que esta ficha se puede obtener girando la ficha  $[2, 6]$ ,  $[6, 2]$  y  $[2, 6]$  representan el mismo dominó. De manera similar, el segundo dominó que se muestra a continuación es un dominó de  $[3, 0]$ . Nuevamente, ten en cuenta que  $[3, 0]$  y  $[0, 3]$  representan el mismo dominó.



Un juego de dominó de máximo 2 puntos es el que contiene todas las fichas posibles con un número de puntos que va desde 0 a 2 en cada uno de sus extremos, sin que haya dos fichas de dominó iguales. Un juego de dominó de máximo 2 puntos tiene las siguientes seis fichas:  $[0, 0]$ ,  $[0, 1]$ ,  $[0, 2]$ ,  $[1, 1]$ ,  $[1, 2]$ ,  $[2, 2]$ . Observa que las tres fichas de dominó  $[1, 0]$ ,  $[2, 0]$  y  $[2, 1]$  no aparecen en la lista porque son las mismas que las tres fichas de dominó  $[0, 1]$ ,  $[0, 2]$  y  $[1, 2]$ .

Del mismo modo, un juego de dominó de máximo 9 puntos contiene todas las fichas posibles con un número de puntos que oscila entre 0 y 9 en cada uno de sus extremos, sin que haya dos fichas de dominó iguales.

Daniel y Benito separan un juego de dominó de máximo 9 puntos en dos pilas. Daniel cuenta todos los puntos de las fichas de dominó de la primera pila. Él cuenta que hay un total de 213 puntos. Benito cuenta todos los puntos de las fichas de dominó de la segunda pila. Él cuenta que hay un total de 266 puntos. Luego, se dan cuenta de que falta una ficha de dominó en el juego. Daniel también señala que, en una de las dos pilas, se encuentran todas las fichas de dominó que tienen el mismo número de puntos en sus extremos izquierdo y derecho. ¿Qué dominó falta en el juego?



## Solución

Primero determinemos qué fichas de dominó hay en un juego de dominó de máximo 9 puntos y calculemos el número total de puntos en todas las fichas de dominó del juego. En un juego de dominó de máximo 9 puntos, la cantidad de puntos en cada extremo de una ficha de dominó puede oscilar entre 0 y 9. Dado que girar una ficha de dominó no cambia el dominó, orientamos cada dominó de manera que el número más pequeño esté siempre en el extremo izquierdo del dominó. Para cada número posible en el extremo izquierdo del dominó, examinamos los números de puntos posibles que pueden ocurrir en el extremo derecho del dominó y luego calculamos el número total de puntos en todos los dominós con ese número de puntos en el extremo izquierdo. Recopilamos esta información en la siguiente tabla.

Número en el extremo izquierdo del dominó	Números posibles en el extremo derecho del dominó	Número total de puntos en todas las fichas de dominó
0	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$
1	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	$9(1) + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 54$
2	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	$8(2) + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 60$
3	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	$7(3) + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 63$
4	4, 5, 6, 7, 8, 9	$6(4) + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 63$
5	5, 6, 7, 8, 9	$5(5) + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 60$
6	6, 7, 8, 9	$4(6) + 6 + 7 + 8 + 9 = 54$
7	7, 8, 9	$3(7) + 7 + 8 + 9 = 45$
8	8, 9	$2(8) + 8 + 9 = 33$
9	9	$1(9) + 9 = 18$

Por lo tanto, el número total de puntos en todas las fichas de dominó en un juego de dominó de máximo 9 puntos es

$$45 + 54 + 60 + 63 + 63 + 60 + 54 + 45 + 33 + 18 = 495$$

Consecuentemente, el número total de puntos en las dos pilas es  $213 + 266 = 479$ . Eso deja un total de 16 puntos en la ficha que falta.

En un juego de dominó de máximo 9 puntos, las únicas fichas con un total de 16 puntos son [8.8] y [7.9]. Dado que cada dominó con el mismo número de puntos en sus extremos izquierdo y derecho está presente en una de las dos pilas, tenemos que la ficha [8, 8] está presente. Por lo tanto, la ficha que falta debe ser la ficha [7, 9].