Problema de la Semana
Problema D y Solución
Multiplicación de Dígitos

Problema

Los dígitos de cualquier entero positivo se pueden multiplicar para dar el *producto de dígitos* del entero. Por ejemplo, 345 tiene el producto de dígitos de $3 \times 4 \times 5 = 60$. Hay muchos otros enteros positivos que tienen 60 como su producto de dígitos. Por ejemplo, 2532 y 14 153 tienen un producto de dígitos de 60. Ten en cuenta que 256 es el entero positivo más pequeño con un producto de dígitos de 60.

También hay muchos enteros positivos que tienen un producto de dígitos de 2160. Determine el entero más pequeño.

Solución

Sea N el entero positivo más pequeño cuyo producto de dígitos es 2160.

Para encontrar N, debemos encontrar el mínimo número posible de dígitos cuyo producto sea 2160. Esto se debe a que si el entero a tiene más dígitos que el entero b, entonces $a > b$. Una vez que hemos determinado los dígitos que forman N, entonces se forma el entero N escribiendo esos dígitos en orden creciente.

Tenga en cuenta que los dígitos de N no pueden incluir 0, de lo contrario, el producto de dígitos de N sería 0.

Además, los dígitos de N no pueden incluir 1, de lo contrario podríamos eliminar el 1 y obtener un entero con menos dígitos (y por lo tanto, un entero más pequeño) con el mismo producto de dígitos. Por lo tanto, los dígitos de N estarán entre 2 y 9, ambos incluídos.

Dado que los dígitos de N se multiplican a 2160, podemos usar la descomposición en factores primos de 2160 para ayudar a determinar los dígitos de N:

$$2160 = 2^4 \times 3^3 \times 5$$

Para que el producto de dígitos de N tenga un factor de 5, uno de los dígitos de N debe ser igual a 5.

El producto de dígitos de N también debe tener un factor de $3^3 = 27$. No podemos encontrar un dígito cuyo producto sea 27 pero podemos encontrar dos dígitos cuyo producto sea 27. En particular, $27 = 3 \times 9$. Por lo tanto, N también podría tener los dígitos 3 y 9.

Luego, los dígitos restantes de N deben tener un producto de $2^4 = 16$. Necesitamos encontrar una combinación del menor número de dígitos cuyo producto sea 16. No podemos tener un dígito cuyo producto sea 16, pero podemos tener dos dígitos cuyo producto sea 16. En particular, $16 = 2 \times 8$ y $16 = 4 \times 4$.

Por lo tanto, es posible que N tenga 5 dígitos. Hemos visto que esto puede suceder cuando los dígitos de N son 5, 3, 9, 2, 8 o 5, 3, 9, 4, 4.

Sin embargo, observa que el producto de 2 y 3 es 6. Por lo tanto, en lugar de usar los dígitos 5, 3, 9, 2, 8, podemos reemplazar los dos dígitos 2 y 3 con un solo dígito 6. Ahora tenemos los dígitos 6, 5, 8 y 9. El entero más pequeño que usa estos dígitos es 5689.

Es posible que podamos tomar un factor de 2 del 8 y un factor de 3 del 9 para hacer otro $2 \times 3 = 6$. Sin embargo, los dígitos ahora serán 5, 6, 6, 4 y 3. Esto significa que tendremos un número de cinco dígitos que es mayor que el número de cuatro dígitos 5689.