Problema de la Semana

Problema D y Solución

¿Cuántos Cincos?

Problema

El producto de los primeros siete enteros positivos es igual a

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

Los matemáticos escriben este producto como 7!. Esto se lee como "7 factorial". Así que $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$.

Esta notación factorial se puede utilizar con cualquier número entero positivo. Por ejemplo, $11! = 11 \times 10 \times 9 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = 39\,916\,800$. Los tres puntos "$\cdots$" representan el producto de los enteros entre 9 y 3.

Supongamos que $N = 1000!$. Es decir,

$$N = 1000! = 1000 \times 999 \times 998 \times 997 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

Ten en cuenta que N es divisible por 5, 25, 125 y 625. Cada uno de estos factores es una potencia de 5. Es decir, $5 = 5^1$, $25 = 5^2$, $125 = 5^3$ y $625 = 5^4$.

Determina la mayor potencia de 5 que divide a N.

Solución

Solución 1

Para determinar la mayor potencia de 5 que divide a N, necesitamos contar el número de veces que aparece el factor 5 en la descomposición en factores primos de N.

Dado que N es igual al producto de los enteros desde 1 hasta 1000, veamos primero cuáles de estos enteros son divisibles por 5. Los enteros de 1 a 1000 que son divisibles por 5 son $5, 10, 15, 20, \ldots, 990, 995, 1000$. Es decir, un total de $\frac{1000}{5} = 200$ enteros de 1 a 1000 son divisibles por 5.

Cada entero que sea múltiplo de 25 sumará un factor adicional de 5, ya que $25 = 5 \times 5$. Hay $\frac{1000}{25} = 40$ enteros de 1 a 1000 que son múltiplos de 25. Estos enteros dan otros 40 factores de 5, lo que hace que el total sea $200 + 40 = 240$.

Cada entero que sea múltiplo de 125 sumará un factor adicional de 5. Esto se debe a que $125 = 5 \times 5 \times 5$, y dos de los factores ya se contaron cuando analizamos 5 y 25. Hay $\frac{1000}{125} = 8$ enteros desde 1 hasta 1000 que son múltiplos de 125. Estos enteros dan otros 8 factores de 5, lo que eleva el total a $240 + 8 = 248$.

Cada entero que sea múltiplo de 625 sumará un factor adicional de 5. Esto se debe a que $625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5$, y tres de los factores ya se contaron cuando analizamos 5, 25 y 125. Hay 1 entero de 1 a 1000 que es un múltiplo de 625, es decir, 625. Este número entero da otro factor de 5, lo que hace que el total sea $248 + 1 = 249$.

La siguiente potencia de 5 es $5^5 = 3125 > 1000$, por lo que hemos contado todos los factores de 5 en 1000!.

Por lo tanto, la descomposición en factores primos de N contiene exactamente 249 factores de 5. Entonces, la mayor potencia de 5 que divide a N es 5^{249}.

Solución 2

Hay muchas similitudes entre la Solución 1 y la siguiente solución. En esta solución dividiremos factores de 5 hasta que no quede ninguno.

1. En los enteros de 1 a 1000, hay $\frac{1000}{5} = 200$ enteros que son divisibles por 5, los cuales son $5, 10, 15, \ldots, 990, 995, 1000$. Si dividimos cada uno de estos enteros por 5, obtenemos la segunda lista $1, 2, 3, \ldots, 198, 199, 200$.

2. Esta segunda lista contiene $\frac{200}{5} = 40$ enteros que son divisibles por 5, los cuales son $5, 10, 15, \ldots, 190, 195, 200$. Si dividimos cada uno de estos enteros por 5, obtenemos la tercera lista $1, 2, 3, \ldots, 38, 39, 40$.

3. Esta tercera lista contiene $\frac{40}{5} = 8$ enteros que son divisibles por 5, los cuales son $5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$. Si dividimos cada uno de estos enteros por 5, obtenemos la cuarta lista $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

4. Esta cuarta lista contiene 1 entero que es divisible por 5, es decir, el entero 5.

En total, hay $200 + 40 + 8 + 1 = 249$ factores de 5 en $1000!$. Por lo tanto, la mayor potencia de 5 que divide a N es 5^{249}.

Esta es una explicación de lo que sucede en esta solución. Cuando creamos la primera lista de múltiplos de 5, descubrimos que había 200 enteros desde 1 hasta 1000 que son divisibles por 5. Cuando creamos la segunda lista de múltiplos de 5, en realidad estábamos contando los enteros de 40 desde 1 hasta 1000 que son divisibles por 25. Cuando creamos la tercera lista de múltiplos de 5, en realidad estábamos contando los enteros de 8 desde 1 hasta 1000 que son divisibles por 125. Y finalmente, cuando creamos la cuarta lista de múltiplos de 5, en realidad estábamos contando el entero de 1 a 1000 que es divisible por 625.